S. 1802. C. 1.

X2. 4. 5

Comm. I-XXIV
Nov. — I-XX
Acta I. II. III, 1. III, 1.
108546
S 1802 c. 1.

COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS I.

AD ANNVM cIɔ Iɔcc xxvi.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cIɔ Iɔcc xxviii.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

PETRO II

RVSSORVM IMPERATORI

AVGVSTO

CETERA CETERA CETERA

IMPERIVM PACIFICVM

DIVTVRNVM FELIX

PRECATVR

ACADEMIA PETROPOLITANA.



QVanquam dictu difficile eſt, utrum belli an pacis artibus maiorem gloriam conſecutus ſit PETRVS MAGNVS Imperator, Avus Tuus, tamen hoc utique certum eſt, eum in utroque genere excellentem non modo praeclara multa et paene incredibilia praeſtitiſſe, verum etiam plura volviſſe animo, et futuro tempori exequenda deſtinaſſe, niſi inopinata morte oppreſſus fuiſſet. Quae cum orbi terrarum nota ſunt, ſupervacaneum foret, hic repetere, ſi ullo pacto temperare nobis poſſemus a tantarum virtutum commemoratione, quas in Te iam renaſcen-

ſcentes, imo, ut rectius loquar, in iuventute Tua maturas cernimus aptasque ad perficienda omnia, quae Petro in caelum recepto Divina Providentia Tibi reſervavit.

Inter ultimas Magni illius Imperatoris curas non minimam fuiſſe conſtat, quam de Academia Petropolitana ſuſceperat; neque arbitror, ullum huic Academiae honorificentius, aut de eiusdem utilitate certius teſtimonium produci poſſe, quam quod divi Petri auctoritate partim in Germania, partim in Gallia Italiaque tam ſolicite, tam conſtanter, tantisque praemiis propoſitis, viri, qui huic negotio pares credebantur, conquiſiti ſunt, quorum ſtudia labores ac vigiliae, cum ad cives Tuos, AVGVSTE, in primis pertineant, eo minus hoc primum ſuorum Commentariorum volumen Tibi Patri Patriae offerre dubitant Academici, quod Avi Tui auſpiciis iam pridem inchoatum, Tuo nunc demum iusſu ac munificentia in publicam lucem prodit.

His ſuis ſpeciminibus non infeliciter ſe imitatos putant Societatis Pariſinae aliarumque induſtriam, quarum iudicio et exemplo ſe tuentur adverſus illorum reprehenſionem, qui acutisſima in Phyſica et Matheſi problemata

)(3 *con-*

contemnunt, niſi illico uſus eorum aliquis in Mechanica ſimilive arte oſtendatur: tanquam ſi cognitio veritatis, quae ipſa per ſe in omni doctrina ſapientem delectat, ſolius lucri, quod inde quaeri poteſt, magnitudine metienda ſit, cum tamen utilitas Geometriae difficilioris illius atque intimae, etiam in quotidianis rebus ingens deprehendatur, uti ex iis, quae de arte navigandi, de temporis in aequales articulos diviſione, de iactu telorum, propagatione ſoni atque luminis aliisque quam plurimis problematis demonſtrata fuerunt, conſtat. Praeterea ſiderum ſcientiam Aſtronomi tum Petropoli colunt, tum ad extimas, quae imperio Tuo parent, ſeptentrionis oras tranſtulerunt, ut iuncta in tam diverſis locis opera obſervationes ſuas ad incrementum Aſtronomiae atque Geographiae conferrent. Erunt denique in iis, quae ad Anatomen et Humanitatis ſtudia pertinent, nova non pauca, nec aequis iudicibus ſpernenda.

Academici vero exiſtimarunt, ſe non melius de civibus Tuis, quibus erudiendis praefecti ſunt, mereri poſſe, quam ſi amorem earum artium, quarum ſcientiam ipſi profitentur, Tibi a teneris commendarent, quando ad Imperatoris

ratoris

ratoris exemplum reliqua hominum turba componi ſolet: idcirco Mathematum et Hiſtoriarum epitomas quasdam aetati atque indoli Tuae aptas partim ediderunt, partim adhuc parant, quibus utriusque ſcientiae initia traduntur, facilia illa quidem, ſed ita neceſſaria, ut ſine iisdem ad veram eruditionem nemo perveniat. Praeterea uſum machinarum in attenuando comprimendove aere, in allevandis parva vi maximis oneribus, in excitando per radios ſolis igne, aliaque et utilia et viſu iucunda Tibi ſemel atque iterum demonſtrarunt, quum, mirantibus iis, qui adſtabant, contemplari omnia accurate, antliam denique ipſe manu verſare atque aerem extrahere gauderes. Haec illi, ut potuere, in hunc diem tentarunt, plura olim, atque maiora in Tuum Tuaeque gentis uſum praeſtituri. Sicut non illico poma profert arbor peregre transplantata, ſed tempore opus habet et cultura ſoli, ut radices agat atque in terram inſinuet, antequam effloreſcat et fructus ipſa ſuos carpentibus commendare poſſit: ita mirum non eſt, uno alterove anno non omnia commoda ex Societate noſtra in Ruſſiam emanaſſe, quae procedente tempore certo ſequentur, poſtquam leges Academicis datas et reditus a Petro Ma-

gno

gno iisdem conſtitutos Tua ſingularis benevolentia in ſempiternum tempus confirmavit.

Tibi vero DEVS hunc erga bonas artes animum ſervet, avertatque a Te, quaecunque indoli Tuae divinae repugnant. Servet Tibi hanc clementiam atque manſuetudinem, qua paucis poſt adeptum imperium diebus edicebas, "praecipuam "Tibi curam fore, ut populum Tuum pietate "et iuſtitia regas, ut afflictis ſuccurras, ut pau- "peres et iniuſte oppreſſos ad Te confugientes "non repellas, ſed vultu ſereno querimonias "eorum exaudias et laudatiſſimo Titi Veſpaſia- "ni exemplo neminem unquam a Te triſtiorem "dimittas.

Quid non boni expectemus ab Imperatore, qui haec pollicetur? Quae profecto tanta ſunt, ut nec Ruſſia Dominum optare poſſit, cui pareat libentius, neque alium eligere potuiſſe videatur Divina Providentia, cui potius, quam Tibi generique Tuo imperium ſine fine concederet.

Moſcuae
Calend. Novembr.
clↄ Iↄcc XXVIII.

Academicorum nomine
ſcripſit

Chriſtianus Goldbach.

PRAEFATIO.

NOn dubito, quin Societatis noſtrae Commentarii, cum ad exteras nationes pervenerint, deſiderium in illis excitaturi ſint, penitius cognoſcendae huius ipſius Congregationis, et ſane intereſt eruditorum, praeſertim qui communia nobiſcum ſtudia colunt, ut non ſolum ſciant, quid apud alias gentes novi inventum ſit, et quae incrementa ipſae artes ceperint, ſed etiam intelligant, quo numero et loco ſint illi, qui has artes profitentur atque exercent, nobis vero favorem ac beneficia Auguſtorum, quibus convocati, et in hunc diem excepti nutritique ſumus, ſilere, niſi ingratis, non licet.

)()(PE-

PETRUS I. Ruſſorum Imperator cum per varias Europae regiones iret, in quibusdam vero etiam ſubſiſteret diutius, ita ubique verſatus eſt, ut quidquid usquam optimum eſſet, id animo comprehenderet atque in civium ſuorum uſum conſervaret, conſilio laudabili, ſucceſſu admirando. In Britannia et Belgio, non modo quae ad inſtruendam claſſem, bellumque navale adminiſtrandum pertinerent, ſolicite perſpexit ac tenuit, ſed prima rei nauticae rudimenta artemque naves et gubernandi et extruendi didicit, ſed didicit ea ſolertia eaque laboris patientia, quae fidem apud poſteros ſuperabit. In Germania haud dubie complura ad uſum belli et emendationem diſciplinae militaris utilia obſervavit, quae in Rusſiam transferret. In Gallia copia rerum et ingenio atque humanitate incolarum mirum in modum delectatus eſt, occurrentibus veluti eruditis atque invicem certantibus, ut bonarum artium ſtudia Hoſpiti commendarent: Academiam vero Pariſinam, perſpecta eiusdem utilitate meritisque

tisque Academicorum, ita dilexit, ut inſolito quidem ſed memorabili exemplo iſti Societati nomen daret. Non enim a Maieſtate ſua alienum putavit, in eorum collegium adoptari, quorum opera atque vigiliis, pacis bellique artes ab ignorantia priſtinorum ſaeculorum vindicantur, et naturae ſcientia, qua nihil pulchrius, nihil excellentius humanum ingenium novit, his noſtris temporibus incredibiliter aucta atque perfecta eſt.

Cum ad ſuos rediisſet Petrus M. epiſtola ad Academicos Pariſinos data (quae publice extat) ſe etiam ad diligentis Academici laudem contendere affirmabat, et praeter deſcriptionem Caſpii maris plura communicaturum non indigna iudicio et induſtria Academicorum pollicebatur. Poſtea vero quam bellum difficile et pertinax memorabili acglorioſa pace compoſuerat, ad nutriendas excolendasque in regnis ſuis artes praecipue curam intendit, et conſilium condendae Petropoli Academiae, quod iamdiu

preſſerat, exequendum duxit. Fuit ille quidem ita de ſalute ac fama gentis ſuae ſolicitus, ut nihil domi omitteret, quod, ſive ad extruendam urbem ſuo nomine dignam, ſive ad claſſem navium ampliſſimam et cum instructisſimis quibusque comparandam requireretur, ſed multo magis armis requiescentibus imitandam putavit illúſtrem Gallorum, quam paullo ante diximus, Academiam, et cum minime ignoraret, quantis difficultatibus obnoxium eſſet negotium, tantum abeſt, ut a propoſito deſiſteret, ut potius, quae erant obſtacula mirabili benignitate expugnaret. Iam litterae ad exteros cum mandato Imperatoris mittebantur, iam reſponſa adventabant, cum inopinata morte Petrus terris eripitur. Huius fati nuncio quamvis valde perturbarentur, qui ſe itineri paraverant, CATHARINAE AVGVSTAE auctoritate mox confirmati ſunt, acceptisque ampliſſimis privilegiis Petropolin conceſſerunt plerique eorum, quorum nomina in titulis ſpeciminum exſtant, praeter

Ioan-

Ioannem Simonem Beckenſteinium,
Ioannem Georgium Leutmannum et
Michaelem Burgerum,

qui poſtremi advenerunt. *Nicolaus Bernoullius* et *Michael Burgerus*, vertente adhuc anno, diem ſuum obierunt, de quorum vitis et meritis alias dicemus.

Praeter hos viri quidam celeberrimi in exteris terris degentes ad Societatem noſtram acceſſerunt, quos honoris cauſſa nominamus, eo ordine, quo in Academiam cooptati ſunt,

Chriſtianus Wolfius, Marpurgi,
Ioannes Bernoullius, Baſileae,
Marchio Ioannes Polenius, Patavii et
Petrus Antonius Michelottus, Venetiis.

Induſtria eorum, qui in hanc Societatem convenerunt, tripartita eſt, aliis Matheſin, aliis Phyſicam, aliis denique Humanitatis ſtudia colentibus, eo ordine atque

 lege

lege, ut quilibet in ſe receperit, non ſolum quotidie una hora eam artem, quam callet, publice docere atque in eadem duos iuvenes ſibi commiſſos inſtituere privatim, verum etiam eiusdem artis ſuae epitomen, quae diſcentium ſtudiis inſerviat, aut aliquod inſigne opusculum conſcribere, ſuoque ingenio et ſolertia ſcientiae fines promovere. Idcirco pauci Academicorum, qui iam ſub aeſtatem anni cIɔ Iɔ ccxxv acceſſerunt, privatos conventus inchoarunt, in quibus, quae domi quisque elaboraverat, praelegit, ut collegarum ſententias exploraret, quae conſultationes aucto deinde Academicorum numero bis in hebdomade continuatae, in hoc, quod nunc publicamus, et alterum, cuius impreſſio maturabitur, volumen ſuccreverunt.

Cum vero haec Societas ab aliis, quae in Europa florent, eo differat, quod in iſtis indigenae plerique, in hac noſtra exteri

fere

fere omnes reperiantur , illos ſaepe privata induſtria in Societatem coeuntes Regis auctoritas confirmarit, has ſola Imperatoris Maieſtas ſuſtineat, aequum erat providere , ne quid iis , ad commoditatem vitae deeſſet. Igitur et ſtipendia et ſubſidia ſtudiorum, de quibus pacti erant Academici , liberaliter exhibita fuerunt. Acceſſit PETRI II. edictum , quo Academiae reditus perpetuo confirmantur.

Qua de cauſſa ſperamus fore, ut Academici, proceſſu temporis et maiora et utiliora Ruſſicae genti producant , ſi Imperator , qua coepit clementia, bonas artes tueatur, Avique deſtinata perficiat. Verum quando ipſe maioribus curis diſtinetur, dum tanti imperii gubernacula capeſſit, ut tam diverſas et per maximam partem Europae Aſiaeque diffuſas nationes ſive in officio contineat , ſive a vicinorum iniuriis defendat , rogamus atque obteſtamur , virum

rum immortalibus in Ruſsiam meritis illuſtrem, Imperii Ruſſici Procancellarium Baronem HENRICUM de OSTERMANN, ut ad tam multa, quibus Academicos ſibi obligavit, beneficia hoc maximum addat, et quemadmodum AVGVSTO praecipue affectum atque amorem erga eruditos viros excitavit, eundem pro ſua ſumma prudentia et gratia apud Imperatorem conſervare atque augere velit.

Chriſtianus Goldbach.

INDEX

INDEX
COMMENTARIORUM

IN CLASSE
MATHEMATICA.

Iacobi Hermanni, De Menſura virium Corporum. p. 1.
Georgii Bernhardi Bülffingeri, De Viribus corpori moto inſitis, et illarum Menſura. p. 43.
Nicolai Bernoullii, De Motu corporum ex percuſſione. p. 121.
Danielis Bernoullii, Examen Principiorum Mechanicae p. 126.
Iacobi Hermanni, De Problemate Kepleriano. p. 142.
Eiusdem, De Calculo integrali. p. 149.
Ioannis Bernoullii, De Integrationibus Aequationum differentialium. p. 167.
Chriſtiani Goldbachi, De Caſibus quibusdam integrabilibus. p. 185
Nicolai Bernoullii, Analyſis Aequationum quarundam differentialium. p. 198.
Chriſtiani Goldbachi, Methodus integrandi Aequationem differentialem. p. 207.
Iacobi Hermanni, De Epicycloidibus Sphaericis. p. 210.
Chriſtiani Wolffii, Principia Dynamica. p. 217.

IN CLASSE
PHYSICA.

Iohannis Chriſtiani Buxbaum, Noua Plantarum genera. p. 241.
Georgii Bernhardi Bülffingeri, De directione Corporum gravium in vortice Sphaerico. p. 245.

XXX *Ioannis*

Ioannis Georgii Du Vernoi, Deſcriptio Vaſorum Chyliferorum. p. 262.
Danielis Bernoullii, Tentamen nouae de motu Muſculorum Theoriae. p. 297.
Eiusdem, Experimentnm circa neruum opticum. p. 314.
Georgii Bernhardi Bülffingeri, De variis Barometris ſenſibilioribus et eorum noua ſpecie ac uſibus. p. 317.
Ioannis Georgii Du Vernoi, De Ciſterna et ductu Thoracico Catopardi, Phocae et Elephanti. p. 342.
Friderici Chriſtophori Meyeri, De Luce Boreali. p. 351.
Petri Antonii Michelotti, Rari ac prope inauditi ex utero morbi hiſtoria. p. 368.
Obſervationes Anatomicae. p. 379.

IN CLASSE
HISTORICA.

Theophili Sigefridi Bayeri, De origine et priſcis ſedibus Scytharum. p. 387.
Eiusdem, de ſitu Scythiae ſub aetatem Herodoti. p. 400.
Eiusdem, De Muro Caucaſeo. p. 425.

* * *

Ioſephi Nicolai De l'Isle et *Ludouici De l'Isle de la Croyere* Obſervationes Aſtronomicae. p. 465.

CLAS-

CLASSIS
PRIMA
continens
MATHEMATICA

DE
MENSURA VIRIUM CORPORUM

Autore I. Hermanno.

I.

VIs corporis cujusque, conſentientibus Mechanices ſcriptoribus omnibus, denotat *potentiam motum efficiendi*, vel in hoc ipſo corpore cui hæc potentia ineſſe intelligitur, vel in aliis corporibus ab ipſo diverſis. Nullum enim corpus vere quieſcens talem potentiam motricem habere poteſt, ſed *vi* tantum inertiæ præditum eſt, qua, vi in ipſum agenti, reſiſtit. *M. Sept. 1725.*

2. Sermo autem hic eſt de corpore *vere* quieſcente, & hoc nomine intelligimus non ſimpliciter illud quod apparenter tantum quieſcit, ſed illud potius quod

omni conatu ad motum deſtitutum eſt. Dantur enim corpora quæ, etiamſi actu ipſo non moveantur, conatum tamen habent ad motum, qui verò conatus propter interpoſita impedimenta inefficax eſt. Sic corpus grave plano cuidam horizontali incumbens apparenter quidem quieſcit, quia planum in quo eſt deſcenſum ejus impedit, ſed non ideo tamen vere quieſcit, quandoquidem conatum deſcendendi habet, qui in deſcenſum actualem erumpet, ſimulatque planum corporis deſcenſum impediens ablatum fuerit.

3. Ingens ergo diſcrimen eſt inter potentiam quæ *motum actualem* producit, & potentiam quæ tantum in *ſimplicem conatum* deſinit. Hæc enim eſt tantum *Vis mortua*, illa vero vis viva vocatur. Itaque corpus filo appenſum, vel plano cuicunque inſiſtens *vim mortuam* tantum habet. Sed ſi actu ipſo movetur, tunc *vim vivam* habere, dicetur.

Omnis autem ſcientia Mechanica verſatur in eo, ut menſuras idoneas inveniamus juxta quas tum vires mortuas corporum, tum vires vivas rectè æſtimare liceat. Ex quo apparet veram doctrinam virium nonnullius momenti eſſe, adeoque dignam quæ diligenter & caute excolatur. Etiamſi verò circa *vires mortuas* nullæ ſint controverſiæ, ut ſunt circa vires vivas, ab iis tamen initium faciam.

4. Quantum ergo ad vires mortuas attinet earumque menſuram: Hæc menſura inventu difficilis non eſt. Modica enim attentio adhibita manifeſtabit unicuique, quod pondus cujusque corporis menſura ſit ejus *vis mortuæ*, in quantum hæc vis manat ex principio gravitatis. Hanc reſtrictionem addidi, quia alia datur ſpecies vis mortuæ in corporibus, quæ non fluit ex principio gravitatis,

vitatis, & hujus ſpeciei vis mortuæ ſunt *vires centrifugæ* corporum in gyrum actorum. Quotiescunque enim corpus aliquod uniformi, aut etiam quocunque variato motu peripheriam circuli aliusve curvæ deſcribit, ſingulis motus hujus momentis conabitur motum ſuum proſequi in directione tangentis circuli vel curvæ in eo puncto in quo eſt: Singulis ergo momentis mobile conatur à peripheria circuli, vel à curva recedere in directione perpendicularis ad tangentem per centrum gravitatis corporis tranſeuntis, ſed quoties mobile reapſe non poteſt recedere à peripheria circuli vel curva & tantum conatum habet recedendi, hic conatus eſt *vis mortua*. Conatus enim centrifugi cum gravitate comparari poſſunt, ſuntque adeo vires centrifugæ & gravitas quantitates homogeneæ. Jam *vires mortuæ* cujuscunque ſint ſpeciei ſunt maſſis corporum proportionales, ſi cætera ſint paria: hoc eſt, ſi gravitas in utroque mobili ſit eadem; aut ſi ambo mobilia incedant æquali celeritate in circulis æqualibus. Hoc probatu facillimum: incumbant plano cuidam horizontali & immobili corpora duo inæqualia, minus A & majus B, utrumque tantam vim in planum exſeret, quantum eſt ejus pondus, quia hoc planum deſcenſui amborum corporum directe oppoſitum & immobile eſt; eſt vero pondus majoris B ad pondus minoris A, ut maſſa ipſius B ad maſſam ipſius A, hoc enim paſſim receptum eſt, ergo vis mortua corporis A eſt ad vim mortuam alterius B, ut maſſa A ad maſſam B. Res ergo ita ſe habet cum viribus mortuis à gravitate pendentibus, idemque de iis quæ à viribus centrifugis fluunt, facile oſtendi poteſt; nam quia (*hyp.*) ambo corpora A & B æquali celeritate in

circulis æqualibus in gyrum aguntur , ſi B majorem habet virtutem centrifugam quam corpus A, id venit à maſſa, propterea toties vis centrifuga corporis B major eſt vi centrifuga corporis A, quoties maſſa illius B major eſt maſſa hujus A. Eſt ergo, ut vis mortua B proveniens ab ejus vi centrifuga , ad vim corporis A, ita maſſa B ad maſſam A.

Pari ratione oſtendi poteſt , quod , ſi intenſitas gravitatis in diverſis corporibus, aut intenſitas vis centrifugæ corporum in diverſis circulis gyrantium, diverſa ſit, vires mortuæ futuræ ſint in ratione compoſita ex maſſis corporum & intenſitatibus gravitatis, aut viribus centrifugis corporum circulariter motorum. Per intenſitatem verò gravitatis aut vis centrifugæ intelligo, gravitatem ſeu pondus, quod corpus cujus maſſa eſt ut 1. habet in diverſis diſtantiis à centro gravium, vel vim centrifugam quam idem corpus in diverſo ſtatu motus circularis habet. Tantum de viribus mortuis.

5. Quam verò rationem habet *vis mortua* ad *vim vivam*? ad hanc quæſtionem probatiſſimi quique Autores reſpondent , quod vis viva *infinita* ſit præ vi mortua , & legi merentur ea , quæ hac de re habent *Galileus*, *Torricellius*, *Joh. Alph. Borellius* & alii , qui omnes dedita opera probare conati ſunt tum experimentis, tum etiam rationibus , *vim percuſſionis* infinitam eſſe, ſi cum *ſimplice pondere vel gravitate corporum* eam comparare velimus. Superfluum duco eximiorū virorum argumenta huc tranſcribere, quippe quæ in ipſorum operibus editis legi & ponderari poſſunt , & ſuper hac re nulla controverſia eſt inter Peritos. Id unicum ergo hoc loco monebo , præclariſſimos illos Philoſophos

phos accuratius locuturos fuiſſe, ſi vim percuſſionis, & gravitationem corporum quantitates heterogeneas, adeoque comparationis incapaces dixiſſent; quemadmodum *Carteſius* de hiſce virium ſpeciebus locutus eſt, qui (Epiſt. 74. Part. I.) ad P. *Merſennum* expreſſe ſcribit, quod vis ea quæ ponderi ad aliquam altitudinem attollendo ſufficit *duas ſemper dimenſiones habeat*, illa verò quæ ſuſtinendo ponderi in quolibet hujus altitudinis puncto ſufficit, *nunquam plures dimenſiones habeat, quam unam*, ita ut hæ vires perinde inter ſe differant ac ſuperficies à linea, ac propterea rationis incapaces ſint. Hoc idem de vi percuſſionis & de gravitatione corporum eſt dicendum, illa enim eſt vis viva hæc verò vis mortua. Quæ in hoc paragrapho ſtrictim tantum diximus in ſequentibus clarius probabuntur, poſteaquam de menſura virium vivarum loquuti fuerimus.

6. Non una omnium eſt ſententia circa rationem quam *vires vivæ* inter ſe ſervant. Plerique enim autumant has vires ſequi rationem impetuum corporum, ſeu quantitatum motus, hoc eſt, quod vires vivæ duorum corporum ſint in compoſita ratione maſſarum & celeritatum. Ita ſane univerſa pene Mechanicorum cohors ſentire videtur. Qui vero cum *Illuſtri Leibnitio* ſentiunt, paulo aliter ſtatuunt, vires illas vivas in compoſita eſſe ratione maſſarum & duplicata velocitatum corporum. Hanc theſin *Leibnitius* primum inſeruit *Actis Erudit.* 1686. pag. 161. eamque ex gemino principio deduxit 1. *quod unumquodque corpus grave*, abſtrahendo ab omnibus motus impedimentis externis, *verticaliter cadendo vim acquirat aſcendendi ad ipſam altitudinem, ex qua cecidit.* 2. *Quod vis qua opus eſt ad*

elevandum grave A unius libræ ad altitudinem quatuor ulnarum, præciſe æqualis ſit vi qua aliud corpus grave B, quatuor librarum attolli poſſit ad altitudinem unius ulnæ. Ex quibus ipſi facile fuit concludere, quod vires corporum ſint ut facta ex maſſis in quadrata celeritatum. Certitudo autem hujus concluſionis pendet à certitudine principiorum, quorum primum nemini negatur, & alterum quoque cum hac reſtrictione *ſi tempora aſcenſuum æqualia fuerint*, ab omnibus admittitur. Hoc ſenſu ſaltem D. *Abbas Catelanus* qui in Novellis Reip. litterariæ 1686. pag. 577. Carteſianorum partes adverſus Leibnitium in ſe ſuſcepit, ſecundum Leibnitii principium admiſit, prætendens tamen eo turpiter abuſum eſſe Leibnitium, quod illud corporibus quæ inæqualibus temporibus altitudines ſuas abſolvant, applicuerit, cum tamen motibus tantum iſochronis, quoties quinque machinis vulgaribus applicatur, quadrare poſſit. Nempe *Catelanus* & alii Carteſianum principium de quo nunc agitur, ideo tantum de motibus *iſochronis* intellectum voluerunt, ut ſpatia mobilibus deſcribenda poſſent in celeritates convertere, & vires corporum, quantitatibus motus eorundem proportionales facere, nam in motibus uniformibus & iſochronis celeritates ſunt ut ſpatia. *Leibnitius* verò clare oſtendit in iisdem Novellis 1687 pag. 131. nulla opus eſſe conſideratione temporis in æſtimatione virium corporum, & *Carteſius* ipſe, qui (Epiſt. 73. Part. 1.) hoc principio utitur, *quod neque major, neque minor vis requiritur ad aliquod corpus grave certam ad altitudinem elevandum, quam ad elevandum alterum minus grave ad altitudinem tanto majorem, quanto ipſum minus grave eſt; vel ad elevandum aliud gravius ad altitudinem tanto minorem*, nullam temporis

temporis mentionem injicit, etiamſi illud potentiis mechanicis, in quibus motus iſochroni obtinent, applicuerit. Imo verò in Epiſtola ſequenti expreſſe hæc monet: *Primum illud quo poſſit quis in hoc præoccupari, eſt, quod plurimi ſolent ſpatii conſiderationem cum* temporis *aut* celeritatis *conſideratione confundere*; ubi ſtatim ſubdit hæc: *ita in vecte vel in bilance ſuppoſito quod unus radius alterius ſit duplus et pondus breviori radio alligatum itidem duplum illius quod longiori radio ſit annexum, ita ut ſint in æquilibrio: ubi dicendum eſſet æquilibrii hujus cauſam eſſe, quod ſi pondus majus attolleret minus, aut ab eo attolleretur, tum majus illud pondus non pertranſiret, niſi ſubduplum ſpatium* ejus *quod minus pertranſit: illi dicunt, quod duplo* tardius *moveretur; qui quidem error eo deterior eſt, quanto agnitu difficilior.* Sepoſitam ergo vult Philoſophus conſiderationem *temporis* aut *celeritatis*, à conſideratione *ſpatii*, in æſtimatione virium vivarum, & in hoc ipſo plus artis ſe oſtendiſſe contendit, quam in ulla alia ejusdem ſcripti ſtatici parte. Ipſemet ergo *Carteſius* cum Leibnitio ſentire quadantenus videtur.

7. Vulgaris opinio, quod vires vivæ ſint ut impetus ſeu quantitates motus corporum, fundari videtur in principio nemini quidem negando, ſed male adhibito, nempe in hoc axiomate, quod *effectus proportionales ſint cauſis ſuis adæquatis*. Plerique ſaltem communem virium æſtimationem ex hoc axiomate deducunt: Nam ſi vis alicujus corporis eſt potentia ejus motum efficiendi, hæc potentia conſideranda veniet inſtar cauſæ, & motus productus inſtar effectus; quare potentia dupla, tripla vel ad libitum multiplex, producet motum duplum, triplum &c. vel æque multiplum; hoc ergo pacto vires vivæ corporum

porum forent ut quantitates motus ſeu impetus, non ergo liquet cur hæ ipſæ vires debeant eſſe ut facta ex maſſis corporum in quadrata celeritatum, ut Leibnitius docuit.

8. Non negamus ſpecioſum eſſe hoc argumentum, ſed nihilo tamen verius illud arbitramur. Non inficiamur, quod *cauſæ ſint effectis ſuis proportionales*, id enim recte intellectum & legitime applicatum non modo negari non poteſt, ſed ipſe etiam Leibnitius admittit aliis verbis, cum ſtatuit *inviolabilem eſſe æqualitatem inter cauſam plenam & effectum integrum*: reapſe enim cauſa eatenus cauſa eſt, quatenus effectum ſuum edit, adeo ut hic effectus & cauſa quæ ipſum edidit æquipolleant, quod ſi eſt: qua ratione cauſa agens augetur vel minuitur, in eadem ratione augebitur quoque vel minuetur effectus. Sed negamus quod motus corporis ſeu impetus quatenus hic exponitur per facta ex maſſa in celeritatem corporum, integer & adæquatus ſit effectus potentiæ agentis, ſed potius altitudines ſeu ſpatia per quæ corpora aſcendere poſſunt, aſſumenda eſſent pro menſura effectuum quos potentiæ in hæc corpora agentes edere poſſunt, nec enim, vel ipſo *Carteſio* judice, hæc ſpatia cum celeritatibus aut temporibus ſunt confundenda. Celeritates enim ſunt tantum entia *modalia* & *incompleta*, ſecus ac ſpatia quæ corpora aſcendendo conficiunt. Ad hoc præterea accedit, quod effectus per quantitates motus expoſiti, non ſint capaces menſuræ accuratæ. Genuina enim menſurandi lex poſcit, ut id præciſe, qnod pro menſura aſſumimus, ſemel vel pluries contineatur vel replicetur in rebus menſurandis, id autem in corporibus diverſis celeritatibus latis evidenter non obtinet, etſi enim (ut exemplo Leibnitiano utar) tria corpora æqualia & æquivelocia

velocia præciſe triplo plus habere potentiæ agnoſcam, quam eorum unum, quia una eademque menſura etiam hic ter repetitur, ter enim repetitur corpus certæ quantitatis qualis fuit ſingulorum, non tamen ideo ſtatim concedi poteſt, corpus tres celeritatis gradus habens, ter continere corpus ipſi æquale unum habens velocitatis gradum, quia in hoc poſteriori exemplo communis menſura non eodem modo replicatur in majori quantitate, quo replicabatur in primo exemplo; in hoc enim ens *ſubſtantiale*, hoc eſt, corpus gradum unum celeritatis habens replicatur ter, in altero verò exemplo *celeritas* quæ eſt ens *modale* & *incompletum* unius ejusdemque rei ſubſtantialis ſeu corporis noſtri, replicatur ter, quare non uno eodemque modo minus continetur in majori in duobus hiſce exemplis.

9. *Leibnitius* præterea in pluribus locis, nempe in *Actis Erudit*, 1690. pag. 235. ſ. 1691. pag. 439. & 1695. pag. 156. & alibi contradictionem apertam ſeu abſurdum naſci oſtendit ex eo, ſi vires vivæ æſtimentur per quantitates motus corporum. Suppoſuit enim globum aliquem A, cecidiſſe verticaliter ex altitudine unius pedis, & cum velocitate in fine hujus altitudinis acquiſita motum æquabilem in plano horizontali continuantem, impegiſſe in globum ſubquadruplum & quiescentem B, & in hunc quicquid motus & virium habebat tranſtuliſſe, adeo ut globus B, hoc impactu quatuor celeritatis gradus acquiſiverit, & juxta ſyſtema ordinarium vim æqualem illi quam globus A, caſu ex altitudine unius pedis obtinuerit; oſtendit deinceps *Leibnitius*, quod, cum globus B, motum ſuum à globo A acquiſitum verticaliter in altum convertens, aſſurgere poſſit

ad altitudinem 16 pedum, ope vectis cujusdam attollere poſſit globum A ad altitudinem plusquam triplo majorem ea, ad quam idem globus A aſſurgere poterat cum vi quam caſu ex altitudine unius pedis acquiſiverat. Jam contradictio & abſurdum in eo ſitum eſt.

Habemus duo corpora quorum A habet maſſam ut 4, celeritatem ut 1; alterum B maſſam ut 1 ſed celeritatem ut 4, quæ viribus æqualia ſtatuuntur, cum tamen globus B, cum vi ſua corpus aliquod, alteri A æquale, attollere poſſit ad altitudinem majorem tribus pedibus, corpus verò A, tantum vim habeat ſe ſe attollendi ad altitudinem ſimplam unius pedis. Quare corpus B ſimul & eodem tempore vim *majorem* & vim *æqualem* habet vi corporis A.

Papinus contra quem *Leibnitius* hoc argumentum urſerat in *Act. Erud.* locis cit. aliud replicandum non invenit, quam hoc, per vires naturæ impoſſibile eſſe, ut motus globi A transferatur in alterum quieſcentem B, ſed cum poſtea *Leibnitius* oſtendiſſet, quomodo hoc fieri poſſit, atque vectis conſideratione ad id uſus eſſet, excepit, *nullos dari vectes perfecte rigidos et inflexiles*. Sed tam levi opera vis argumenti non eluditur. Largiamur quod motus alicujus corporis in aliud inæquale corpus transferri non poſſit, largiamur itidem nullum in rerum natura dari vectem rigidum & inflexilem, nihil profecto decedet vi argumenti; nam fieri poteſt, ut globi A & B, qui ratione maſſæ ſunt in ratione quadrupla, æquales habeant motus quantitates, idque ſine ſuppoſitione quod motus unius tranſeat in alterum, aut quod dentur vectes rigidi & inflexiles; itaque fieri poteſt ut minor B, motum ſuum in altum convertens aſſurgat ad altitudinem

16 pedum

16 pedum, & ſi hoc eſt, agnoſcendum erit, quod globus B attollere poſſit globum A ad altitudinem plusquam 3 pedum, ſive detur vectis perfecte rigidus & inflexilis, ſive minus: ſalvum ergo manet Leibnitii argumentum non obſtantibus *Papini* exceptionibus.

Ex dictis ergo quadantenus liquere autumo, quam lubricum & inconſtans ſit negotium vires corporum per quantitates motus æſtimandi, idque tanto magis, quod celeritatis conſiderationem in hoc ſubjecto *Carteſius* ipſe excluſerit loco ſupra jam citato, nempe in Epiſtola 74. Part. 1. ubi inter alia hæc habet: *nihil de celeritate bene et ſolide dici poteſt, niſi prius recte explicata gravitate totoque ſimul mundi ſyſtemate*, etſi vero circa hanc propoſitionem paulo aliter jam ſentiunt Recentiores, ex ea tamen patet, quod ad æſtimandas vires non neceſſum putarit *Philoſophus* ad celeritates attendere, ſed potius ad reſiſtentias quas corpora vincendas habeant, ut in eadem epiſtola expreſſe patet.

10. Quoniam ergo quantitates motus corporum non ſunt effectus integri & pleni potentiarum in corpora agentium, nondum inferre licet ex eo, quod cauſæ effectis ſuis adæquatis proportionales ſunt, vires vivas corporum proportionales eſſe quantitatibus motus eorundem, ut paſſim ſupponi ſolet: & hanc ob cauſam indagandum reſtat, quinam ergo ſint effectus illi adæquati & reales virium vivarum? *Carteſius* ipſe jam pridem ejusmodi effectus reales in laudata epiſtola indigitavit, quando ad reſiſtentias viribus aſcenſionalibus ſuperandas attendere, obiter ſaltem, præcepit. Hoc modo enim habemus effectus menſurandis viribus idoneos: nam propoſitio hæc, *Quod omnia impedimenta motus quæ*

vim aliquam extinguunt ſimul ſumta, huic vi æqualia ſint, æque clara & certa eſſe videtur, ac ullum aliud Geometriæ *axioma*, & eodem redit ac ſi diceretur, *omnes partes alicujus totius et hoc totum ipſum, æqualia eſſe*: nam ſingula impedimenta totidem partes de vi corporum tollunt, & univerſa totam vim. Diſpiciendum ergo reſtat, quænam ſint impedimenta illa quæ vires corporum exhauriunt? ipſa gravitas jam tale eſt, nemo enim ignorat, quod corpus aliquod data cum celeritate verticaliter in altum projectum motum ſuum non continuet in infinitum, ſed ad certam tantum altitudinem pertingat; aſcendere autem deberet in infinitum, ſi nullam reſiſtentiam nullumque motus inpedimentum ſubiret; adeoque ex eo, quod limitatam tantum altitudinem conficiat quam tranſilire non poſſit, neceſſario concludendum, id venire à reſiſtentiis, quas ſuperare debeat dum aſcendit; hæ verò reſiſtentiæ non proveniunt ſolum ab aere corpus aſcendens ambiente, ſed potisſimum à gravitate. Nam ſi à ſolo Aere venirent, Corpus illud in Aere rarisſimo ad quam liberet altitudinem aſsurgere deberet, quod cum non fiat, concludendum eſt, dictam altitudinem gravitatis corpori reſiſtentis indubitatum indicium eſſe: gravitas enim eſt vis illa qua corpora jugiter verſus tellurem pelluntur, propterea hæc vis, quippe contraria vi aſcenſionali, inſtar reſiſtentiæ jam ſpectanda venit. Hoc, niſi fallor, adeo clarum eſt, ut fuſiore probatione non videatur opus: Sed non æque evidens forte videbitur, quomodo hæc reſiſtentia à gravitate proveniens menſurari debeat? Veruntamen unusquiſque qui attenderit, quod corpus aſcendens in ſingulis altitudinis ſuæ deſcribendæ punctis æqualiter in terram gravitet, non poteſt non videre,

dere, ſummam reſiſtentiarum corpori aſcendenti ſuperandarum optime exponi per factum ex altitudine aſcenſus in pondus corporis; & cum hæc reſiſtentiarum ſumma (per ſuperius dicta) vi corporis initio aſcenſus æqualis ſit, liquet, hanc ipſam vim vivam menſurandam eſſe per hoc factum ex altitudine ad quam corpus aſcendit, in pondus ejusdem corporis. Quod ſi verò præter opinionem id nondum ſatis evidens atque probatum videbitur iis qui pro adverſa parte ſtant, demonſtrationem hujus rei pleniorem dabo in ſequentibus. Nunc verò ad alia pergo.

Inter innumera alia motus impedimenta & illud quoque ad menſuram virium aptum eſt, quod ab *elaſtris* æqualibus, & ad æqualem tenſionis gradum perducendis petitur. Jam pridem Celeberr. *Joh. Bernoulli* oſtendit, quod corpus aliquod A *duos* habens celeritatis gradus *quatuor elaſtris* ſimilibus & æqualibus ad eundem tenſionis gradum adductis vim ſuam exhauriat, dum idem corpus A *unicum* habens celeritatis gradum *unico* tantum *elaſtro* ad parem tenſionis gradum adducto vim ſuam exhaurit; talia verò elaſtra æqualia & æqualiter tenſa ſunt effectus adæquati accuratæ menſuræ capaces, quos vires illæ corporis A, modo 2 modo 1 celeritatis gradus habentis edere poſſunt; quoniam vero effectus corporis celerioris ad effectum tardioris eſt, ut 4 ad 1, manifeſtum eſt utique, quod hi effectus ſint in duplicata ratione celeritatum. Argumentum verò ipſum Celeberr. Viri, brevitatis cauſa hic non adduco, quod illud dilucide expoſitum legi poſſit in *Cel. Wolfii* Elementis Mechanicæ pag. 594. Paragr. 275.

Hoc idem alia adhuc ratione eleganter ex elaſtrorum theoriâ deduxit Celeb. *s'Graveſandus* in Elementis Phyſices pag. 112. *Tom. I.*

11. Eadem

11. Eadem virium menſura haberi poteſt ex regulis motus quæ obtinent in colliſione corporum, quemadmodum ante complures annos jam oſtendi. Sit globus A, 2 velocitatis gradibus præditus, qui in plano horizontali incedens, incurrat in alium globum, ſed quiescentem B=3A; huic ergo dabit celeritatem ut 1, & retrocedet A cum celeritate 1. Impingat deinceps hic globus A cum ſua celeritate 1, in alium globum quiescentem C=A, ipſique etiam dabit celeritatem 1, & motus ejus hoc ſecundo impulſu ſiſtetur. Hæc verò omnia ex notiſſimis regulis motus corporum elaſticorum levisſima opera eliciuntur. Habemus ergo hic globum A, qui duobus impulſibus in ſingulos globos quieſcentes B=3A, & C=A, celeritatem eandem transfundens, ut ita loquar, ad quietem redigitur, vimque ſuam amittit; eundem ergo effectum præſtitit, ac ſi globo D=4A=A+3A celeritatem 1 impreſſiſſet, & globus idem A cum celeritate 1, alii ſibi æquali uno impulſu itidem velocitatem 1 imprimet, & ad quietem redigetur, eſt ergo effectus globi celerioris ad effectum tardioris, ut 4A ad A, hoc eſt, ut 4 ad 1. Hanc ob cauſam eſt vis celerioris ad vim tardioris, ut quadratum celeritatis majoris ad quadratum celeritatis minoris.

Nec aliter ſe res habet cum eodem globo A, cum habet 3 gradus celeritatis: impingat enim primo in globum quieſcentem B=5A, & poſt hunc impulſum retrocedet cum celeritate ut 2, in patientem vero B transferet celeritatem 1. Impingat ſecundò globus A cum reſidua velocitate 2, in globum quieſcentem C=3A, iterumque hoc ſecundo impulſu unius gradus velocitatis jactu-

jacturam faciet, & patiens globus C celeritatis gradum 1 acquiret. Reſtabit hoc modo globo agenti A celeritas 1 poſt ſecundum congreſſum. Quod ſi deniquecum hac celeritate in globum æqualem ſed quieſcentem D incurrat, quieſcet poſt hunc tertium impulſum, & patiens globus D eam celeritatem 1 quam agens A habebat, obtinebit. Quare globus A cum velocitatem 3 habet, motum ſuum vel potius vim ſuam omnem transferre poteſt in globos B=5A, C=3A, & D=A, ita ut ſingulis det eandem celeritatem 1. Sed idem globus A celeritate 1 præditus, vim ſuam in unicum tantum globum ipſi æqualem ita transferre poteſt, ut patienti globo eam impertiatur quam ipſe agens ante conflictum habebat. Quare vis globi A habentis celeritatem 3 eſt ad vim ejusdem cum celeritate 1, ut 5A + 3A + A = 9A ad A, hoc eſt, ut 9 ad 1, id eſt, in duplicata ratione celeritatum.

Hoc idem ſemper eveniet, quæcunque ſit ratio celeritatum, & ſane curioſus hac in re ſeſe prodit ſymbolismus inter corpora quæ datis velocitatibus verticaliter in altum projiciuntur, & corpora quæ iisdem velocitatibus alia corpora quieſcentia impellunt. Altitudines enim in quarum ſummitatibus ſingulis corporis aſcendentis celeritas initialis uno gradu decreſcit, in eadem prorſus ſunt ratione numerorum imparium, in qua ſunt maſſæ corporum quibus quieſcentibus ſucceſſivis ictibus unus celeritatis gradus imprimitur à corpore totidem celeritatis gradus initio habente, quot corpus aſcendens habebat à principio aſcenſus, quæ celeritas integra corporis percutientis, ſingulis ictibus uno itidem gradu minuitur. Verbi gratia, corpus A quod cum celerita-

te

te initiali 2 aſcendit, in ſummitate altitudinis 3 pedum jacturam faciet unius gradus celeritatis, & in ſummitate altitudinis ſequentis ſupra modo dictam altitudinem, alterum gradum ſimiliter amittet: novimus enim quod corpus cum ſua celeritate 2 ad altitudinem 4 pedum aſſurgere poſſit, abſtrahendo nunc à reſiſtentia aeris aliisve motus impedimentis. Similiter corpus A cum celeritate 2, impingens in globum quieſcentem B=3A, hoc primo ictu unum celeritatis gradum amittet, & ſi cum reſidua ſua celeritate 1, porrò incidat in globum quieſcentem C=A, & hæc ipſi ſecundo hoc impulſu velocitas adimetur. Quod ſi idem corpus A aſcendat celeritate initiali 3, ut ad altitudinem 9 pedum pervenire poſſit, in ſummitate primæ altitudinis 5 pedum, perdet velocitatis gradum 1, in ſummitate altitudinis ſecundæ 3 pedum ſequentis poſt primam, perdet adhuc gradum unum, ac denique in ſummitate altitudinis tertiæ unius pedis ſequentis poſt ſecundam, amittet tertium ſuum celerit. gradum. Quid fiet jam eidem corpori A ſi tribus vicibus ſucceſſive impingat in globos quieſcentes 5A, 3A, & A, in primum celeritate 3? eveniet nempe ut primo ictu amittat gradum 1, & ſi cum reſidua celeritate 2, impingat in globum 3A, perdet alterum gradum velocitatis, & cum eo qui remanet in corpus tertium A impingens mulctabitur tertio & ultimo celeritatis gradu. Hæc omnia ex doctrina motus gravium, & regulis communicationis motus ultrò fluunt.

12. Imò hæ regulæ communicationis motus non ineleganter deducuntur ex menſura virium vivarum corporum, quam hic probandam ſuſcepimus, modò hoc unicum principium admittatur: *quod eadem virium quantitas*

titas in percuſſione corporum conſervetur, quæ erat ante conflictum. Sint enim globi quorum maſſæ A & B, velocitates eorum ante conflictum a, & b, & poſt conflictum x, & y. Principium ergo iſtud præbet æquationem $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, quam *fundamentalem* appellare liceat; nam ſecundum noſtram virium æſtimationem vires globorum A & B, ante concurſum ſunt ut Aaa, Bbb, & vires eorum poſt colliſionem Axx, Byy; inveniendæ ergo reſtant ex æquatione fundamentali æſtimationes litterarum x & y. Hoc autem præſtitu eſt facilimum; intelligantur enim motus globorum A & B eorumque conflictus peragi in ſpatio mobili, velut in navi, quod ſpatium celeritate indefinite parva dv feratur, in easdem, ſi velis, partes in quas globus A tendit, hoc modo videbuntur ex loco immoto velut ex ripa fluvii in quo navis, vel ſpatium mobile vehitur, globi A & B moveri, antequam congrediantur, velocitatibus $a + dv$, & $b + dv$, & poſt congreſſum, velocitatibus $x + dv$, & $y + dv$, quare ſi in locum celeritatum a, b, x & y æquationis fundamentalis, ſufficiantur eædem celeritates velocitate adventitia ſpatii deferentis auctæ, etiamnum manebit æqualitas, nempe $Aaa + 2Aadv + Adv^2, + Bbb + 2Bbdv + Bdv^2 = Axx + 2Axdv + Adv^2 + Byy + 2Bydv + Bdv^2$, vel deletis iis quæ ſe mutuo deſtruunt, $Aaa + Bbb + 2Aadv + 2Bbdv = Axx + Byy + 2Axdv + 2Bydv$, quod ſi vero ab iſta auferatur æquatio fundamentalis $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, reſtabit æquatio $2Aadv + 2Bbdv = 2Axdv + 2Bydv$, quæ per $2dv$ diviſa, præbet $Aa + Bb = Ax + By$. Vel tranſponendo $Aa - Ax = By - Bb$; æquatio vero fundamentalis ſuppeditat hanc, $Aaa - Axx = Byy - Bbb$, quæ ulterius ad præcedentem applicata, dat pro æquatione reſultante

$a+x=y+b$. Elicuimus igitur ex æquatione fundamentali $Aaa+Bbb=Axx+Byy$, has duas $Aa+Bb=Ax+By$, & $a+x=y+b$; quarum prior manifeſtat, *quod commune centrum gravitatis binorum globorum A & B æquali celeritate ante & poſt conflictum moveatur*: Nam $\frac{Aa+Bb}{A+B}$ eſt celeritas huius centri gravitatis ante concurſum, & $\frac{Ax+By}{A+B}$, eſt celeritas eius poſt colliſionem. Altera vero æquatio *reſultans* indicat, *eandem eſſe accedentibus globis ante impulſum velocitatem reſpectivam, quæ corporibus recedentibus poſt impulſum.*

Iam ex inventa æquatione $a+x=y+b$, elicitur $y=a-b+x$, quæ æſtimatio in $Aa+Bb=Ax+By$ ſuffecta, præbet $Aa+Bb=Ba-Bb+Bx+Ax$, ex qua elicitur $x=(Aa-Ba+2Bb):A+B$. Quare $y(=a-b+x)=(2Aa-Ab+Bb):A+B$. Quæ celeritates ex unico illo aſſumto principio, & menſura virium Leibnitiana erant eruendæ.

13. Æquationes modo inventæ æſtimationes litterarum x & y, definientes, præbent eas ipſas regulas motus ex percuſſione, quas *Wrennus*, *Walliſius*, *Hugenius*, *Mariottus*, & alii pro corporibus *elaſticis* jam pridem dederunt, & aliis fundamentis ſuperſtruxerunt. Quæ ergo in præcedenti §. invenimus probandæ theſi noſtræ, *quod vires vivæ corporum ſint ut facta ex maſſis in quadrata celeritatum*, optime inſervire poſſunt, adhibendo concluſionem inſtar præmiſſæ, & ex hac deinceps eliciendo, quod ſit $Aaa+Bbb=Axx+Byy$. Nam ſi m ſignificet altitudinem verticalem per quam deſcendens grave A motu naturaliter accelerato, in termino ejus inferiore velocitatem a acquirit, n vero altitudinem in cujus imo B ſuam celeritatem b motu pariter accelerato acqui-

acquirit, item p & q ſint altitudines quas globi iidem A & B cum ſuis celeritatibus initialibus x & y motu naturaliter retardato conficere poſſunt; eruntque $m, n, p,$ & q proportionales quadratis celeritatum aa, bb, xx, & yy, eodem ordine ſumtis; ſurrogatis ergo in præcedenti æquatione pro aa, bb, xx, & yy altitudinibus illis proportionalibus, reſultabit æquatio $Am+Bn=Ap+Bq$, vel etiam hæc $\frac{Am+Bn}{A+B}=\frac{Ap+Bq}{A+B}$. Iam vero fractio ad ſiniſtram denotat quantitatem deſcenſus communis centri gravitatis globorum A & B dum altitudines m & n perlabuntur, & fractio quæ eſt ad dextram deſignat quantitatem aſcenſus eiusdem centri gravitatis communis globorum A & B dum ipſi per altitudines p & q aſſurgunt. Quare concludendum, eandem eſſe quantitatem deſcenſus communis centri gravitatis globorum A & B ante conflictum, cum quantitate aſcenſus eiusdem poſt conflictum, ſupponendo quod globi A & B motus in conflictu acquiſitos verticaliter in altum convertant, perinde ac ſuppoſuimus velocitates eorundem quas ante congreſſum habebant, acquiſitas fuiſſe deſcenſu accelerato per eas altitudines quas paulo ante indicavimus: quantitates autem deſcenſus & aſcenſus communis centri gravitatis globorum A & B, in corporum ſummam A+B ductæ, ſunt menſuræ virium ante & poſt eorum concurſum. Hoc ſaltem modo Ill. *Hugenius* plurium corporum ſimul motorum vel in ſe mutuo agentium vires ſemper æſtimaſſe viſus eſt, ut ex pluribus locis demonſtrationum eius quas circa regulas motus ex percuſſione in opuſculis poſthumis dedit, conſtat, & liquidius adhuc ex theoria ipſius centri oſcillationis, quam in *Ho-*

rologio Oſcillatorio exhibuit. Quod ſi vero ſumma virium globorum A & B exponi debet per factum ex deſcenſu centri gravitatis eorum in ſummam ponderum, & ſumma virium earundem per factum ex aſcenſu eiusdem centri gravitatis globorum A & B, in ſummam ponderum eorum, quidni vires eorundem ſolitariæ per *Am* & per *Bn* ante ipſorum congreſſum, & poſt congreſſum per *Ap* & *Bq* exponere liceret immo deberem? Sed non opus eſt ut huic argumento diutius inſiſtamus, quando alia præſtantiora in poteſtate ſunt; inter hæc vero nullum mihi evidentius videtur eo, quod naſcitur ex conſideratione modi, quo *vis aliqua viva* naſci poſſit ex *vi mortua.*

Fig. 1. 14. Ad obtinendam menſuram *vis vivæ* corporis cuiuscunque ex *vi* eius *mortua*, ita proceſſi: ob oculos mihi poſui corpus grave C cadens motu naturaliter accelerato in linea verticali AH, ita ut motum a quiete incipiat in A. Initio ergo motus vidi corpus C omni vi viva deſtitutum in A, quia nullum ibi motum habet, & vis viva ſolis corporibus actu motis tribuitur. Vi tamen mortua ibidem præditum eſſe debet quia corpus grave eſt & determinatum ſuum pondus habet, hanc vim mortuam expoſui per lineam rectam *Aa*, alteri AH perpendiculariter inſiſtentem, ſed poſteaquam delatum eſt in E, ibi vim aliquam vivam iam acquiſivit, quia determinatum aliquem celeritatis gradum ibi nactum eſt, ſed ſepoſita tantisper celeritatis conſideratione, indagandum a quo, quomodo, & quantam vim vivam lucratum eſt in E poſt deſcenſum per ſpatium AE. Hæc autem vis viva non aliunde corpori C acceſſiſſe poteſt quam a *vi* eius *mortua*, nam alia hic non habemus conſideranda, quam corpus C, eius gravitatem, & ſpatium per quod cecidit AE, hoc ſpa-

ſpatium vero ſe habet mere paſſive, nihilque de ſuo ad motum confert; neque corpus C quatenus ut extenſum ſpectatur & determinata ſua maſſa præditum eſt, motum ullum producere poteſt; itaque quicquid motus & virium habet corpus C delatum in E, id a vi mortua indeſinenter agente in corpus, dum per ſpatium AE labitur, provenire poteſt: Sed quomodo? velut corpus C cum eſt in A, urgetur vi *mortua*, *Aa*, in B vi *Bb* qualis *Aa*, in C vi *Cc*, in D vi *Dd*, in E vi *mortua Ee*, ita idem corpus C urgetur in ſingulis ſpatii confecti punctis vi aliqua mortua æquali ipſi *Aa*, ſi gravitas corporum uniformis eſt, ita ut *locus* omnium *virium mortuarum* corpus C in ſpatio AE urgentium ſit *parallelogr. rectangulum Aae*E; hanc ob cauſam vis viva in E acquiſita non poteſt eſſe major neque minor ſumma omnium virium mortuarum quæ in rectangulo *Ae* contineri poſſunt, quæ ſumma per hoc rectangulum ipſum exponitur. Quare vis viva in E acquiſita deſcenſu ex AE, ad vim vivam in H acquiſitam deſcenſu ex AH eſt, ut rectangulum *Ae* ad rectangulum *Ah*, (vel quia hæc rectangula communem altitudinem *Aa* habent) ut ſpatium AE ad ſpatium AH. Hæc ita ſe habent cum gravitas in omni a tellure diſtantia eadem eſt.

Sed quid eveniet ſi, ut Recentioribus placet, gravitas in diverſis a tellure diſtantiis etiam diverſa ſit? Ponamus ergo mobile C (*fig.* 2.) urgeri in ſpatii AH punctis A, B, D viribus mortuis quas applicatæ *Aa*, *Bb*, *Dd* curvæ cuiuscunque *adb* repreſentant, per puncta illa tranſeuntes. Iam ſi deſcenſus iterum a quiete incipit in A, vis viva, quam deſcendens grave per ſpatium AE acquiſivit in E, aliud non eſt quam aggregatum omnium *Aa*, *Bb*, *Dd*, *Ee* quæ in area A*ae*E continentur, nam ab *Fig.* 2.

 his-

hiſce omnibus ſibi invicem ſuccedentibus unice naſcitur, propterea dicta area A*ae*E *vim* corporis *vivam* in E acquiſitam deſcenſu ex AE, & area A*ab*H *vim vivam* eiusdem corporis in H denotat. Quare vis viva in E eſt ad vim vivam in H acquiſitam,ut area *Aae*E ad aream A*ab*H, uti applicatæ harum arearum pondera corporis C in diverſis a terra diſtantiis exponunt.

Fig. 3. Quod ſi mobile C in curva quacunque AEH (*fig* 3.) deſcendat, & pondera eius in diverſis a terra diſtantiis exponantur applicatis *ap*, *bq*, *dr*, &c. curvæ *prt*, erit etiamnum vis mobilis in E acquiſita deſcenſu eius in arcu AE, ad vim in H acquiſitam deſcenſu in arcu AH, ut area *apse*, ad aream *apt*H. Pervenerit mobile ex A in D, & diſpiciamus quanta vi mortua ibi urgeatur ſecundum tangentem DG curvæ in D, quando gravitas ejus ſeu pondus in D exponitur ordinata *dr*, Ad id ponamus arcum AD$=s$, abſciſſam ad$=x$, ordinatam d$r=g$, elementum arcus, ſeu Dm$=ds$, elementum abſciſſæ, id eſt nm$=dx$; exponat DF parallela H*a* gravitatem corporis C in D exiſtentis, demiſſaque ex F perpendiculari FG in tangentem curvæ DG, & reſolvetur vis mortua DF in laterales DG & GF, quarum hæc retunditur a curva ſuper qua mobile incedit, adeoque hoc loco non attendi meretur, illa vero nempe DG eſt vis mortua tangentialis quæ effectum ſuum ubique habet, quippe cui nihil aliud reſiſtit quam aer & ſcabrities curvæ, ſed ſeponimus iam hæc motus impedimenta externa, quaſi non eſſent. His omnibus jam poſitis, triangula ſimilia DFG & Dmn, præbent DG$=\frac{gdx}{ds}$, ducamus hanc in elementum curvæ Dm$=ds$, & factum gdx denotabit incrementum *vis*

vivæ

vivæ, quod mobili acceſſit dum tranſiit a termino D elementi *Dm*, ad eius terminum alterum *m*, & ſummando vis viva in D vel *m*= ſummæ omnium *gdx* quæ in area *aprd* continentur. Quare vis viva in D= areæ huic *aprd*, & vis viva in H=areæ *apt*H, Quod oſtendendum erat

In præcedenti articulo ſuppoſuimus, directiones DF gravium parallelas eſſe, facilitatis cauſſa; nam perinde valet argumentum ſi directiones illæ convergentes ſint in aliquod centrum; eo enim caſu, rectæ Aa, Bb, Dd, &c. quæ horizonti parallelæ ſunt, abibunt iam in arcus circulares concentricos quorum commune centrum eſt punctum illud, in quod directiones gravium convergunt.

15 Quantumvis evidens ſit præcedens argumentum, aut mihi ſaltem videatur: amolienda tamen eſt objectio quæ aliquibus negotium faceſſere poteſt. Objectum enim mihi eſt, cum primum in Conventu Academiæ argumentum iſtud propoſuiſſem; ſimili modo argumentum probare vim vivam cuiusque corporis exponendam eſſe per factum ex tempore deſcenſus in vim mortuam gravitatis, ſi gravitas uniformis, hoc eſt, ubique eadem ſit, & hoc caſu vires vivas corporum proportionales fieri temporibus quibus eas vires acquirunt, ſi corpora quoad maſſam æqualia ſint; ſed ſi inæquales maſſas habeant, tunc vires vivas fore in compoſita ratione temporum & maſſarum. Sint (*fig.* 4.) LM, LN, LO, LP, & LQ *Fig.* 4.
tempora quibus ſpatia AB, AC, AD, AE & AH (*fig.* 1.) percurruntur; Iam cum ſingulis temporis momentis individuis L, M, N, O &c. gravitas uniformis eſt, ut adeo per rectas æquales *Ll*, *Mm*, *Nn*, *Oo*, &c. eam exponere liceat; quidni æquo iure ſumma omnium applicatarum *Ll*, *Mm*, &c. quæ in rectangulo L*lm*M con-

continentur, hoc eſt rectangulum hoc ipſum, *vim vivam* corpori in fine temporis LP acquiſitam exponere licet, quo ante (*fig.* 1) exponebatur rectangulo AE ea, ideo quod hoc rectangulum locus ſit & ſumma omnium Aa, Bb, Cc, &c. quæ in eo continentur, cum tamen LP (*fig* 4.) duratio ſit actionis gravitatis, quemadmodum (*fig.* 1) AE eſt ſpatium deſcenſus hoc eodem tempore?

Reſpondebam tunc, hanc poſteriorem arguendi rationem præ priore locum habere non poſſe ideo, quod *tempus* perinde ac *celeritas* ſit tantum ens *modale* & *incompletum*, *ſpatium* vero deſcenſu confectum ſit *ens reale* indicans multitudinem virium mortuarum in unam veluti ſummam, quæ eſt *vis viva*, agglomeratarum. Addidi præterea, in diverſo ſtatu corpus deſcendens eſſe in diverſis temporis articulis, & non modo maſſam corporis C, ſed etiam ſtatum eius, ſeu motum in conſiderationem ſimul cum gravitate agente & tempuſculo actionis trahendum eſſe, idque hoc modo oſtendi. Sit $LO = t$, tempus quo vis viva V acquiritur, $OP = dt$ elementum huius temporis, quemadmodum dV elementum vis acquiſitæ vel incrementum eius durante tempuſculo dt. Cum incrementum iſtud vis vivæ dV, naſcatur a gravitate g in corpus C agente, quod corpus jam habeat celeritatem u, & maſſam M, atque adeo motus quantitatem Mu, quantitatis huius motus neceſſario ratio habenda eſt, nam in hoc ſtatu in quo eſt mobile, celeritas ab ipſo inſeparabilis eſt; componetur igitur incrementum vis vivæ, ex hiſce tribus, nempe ex g, Mu & dt, eritque adeo neceſſario $dV = gMudt$, non vero ut vulgo ſupponitur, $dV = gMdt$. Jam vero eſt $udt = ds$, ſi hoc ds elementum ſpatii deſignet, & gM, ſignificabit pondus

cor-

corporis C, adeoque ſi formulam $dV = gMudt$, ad *figuram* 1 aptare velimus, in qua pono $AD = s$, $DE = ds$, & quamlibet applicatam Aa, Bb, &c. $= gM$, fiet $dV =$ DdeE, & ſummando V = rectangulo AaeE, ut §. 14 invenimus. Ex quo apparet, quod etiam temporis & celeritatis conſideratio ad eandem virium vivarum menſuram conducat, quam ante invenimus, modò recte ineatur.

16. Quod ſi verò vis corporis C (*fig.* 4.) tempore LP acquiſita exponenda eſſet per rectangulum LPpl, in quo Ll vel Mm &c. ſimplicem gravitationem ſeu vim mortuam corporis C repræſentaret, & rectangulum PQqp vim tempore PQ acquiſitam, hæc eadem rectangula Lp, & Pq, referrent quoque reſiſtentias quas corpus C aſcendendo ſuperandas haberet temporibus PL & QP, quandoquidem gravitatis actioni continuæ aſcenſus corporis contrarius eſt, & ſenſim ſenſimque exſtingui debet. Quare ſi tempora LP & PQ æqualia fuerint, etiam rectangula LPpl, & PQqp æqualia exiſtent, atque adeo reſiſtentiæ hiſce temporibus ſuperandæ. Videamus jam an & quantum hæc cum regulis motus corporum a gravitate cadentium concordent? Cadat mobile C accelerato motu à quiete in A inchoato per ſpatium AE (*fig.* 1) tempore LP (*fig.* 4), & per ſpatium AH tempore LQ. Quare ſi delatum in E motum illic acquiſitum verticaliter in altum convertat, perveniet aſcenſu ſuo usque ad A, non altius, propter reſiſtentiam gravitatis, itaque cum hæc reſiſtentia (*hyp.*) exponatur rectangulo LPpl (*fig.* 4.) & reſiſtentia ejusdem corporis aſcendentis ex H in A, rectangulo QLlq, ponendo LP & PQ æquales, oportet etiam, ut reſiſtentiæ, quas mobi-

le aſcendens ex H in E, & deinceps ex E in A ſubit, æquales ſint. Verum ſi tempus aſcenſus per HA duplum ſit temporis aſcenſus per EA, fiet HA quadrupla ipſius EA, adeoque HE tripla ejusdem EA, quare tempora aſcenſus atque adeo reſiſtentiæ in altitudine HE ut 3, & in altitudine EA ut 1, eſſent æqualia; hoc autem evenire non poteſt, quin gravitas non *uniformiter* in univerſa utriusque ſpatii longitudine agat, ſed *ſubſultim* & *difformiter*, quod oppido abſurdum eſt, & contrarium receptæ doctrinæ de motu gravium. Hæc doctrina enim ſupponit, quod corpus in omni puncto ſpatii quod perlabitur aut in quo aſcendit, grave ſit; grave eſſe autem ſignificat, ibi vi aliqua urgeri, ubi grave eſt; adeoque in communi gravitatis ſyſtemate in omni puncto ſpatii in quo mobile reperitur à gravitate urgetur, idque non modo in communiori gravitatis uniformis ſyſtemate, ſed etiam in omni alio quod quis excogitare poſſet. Nam univerſalis doctrina virium centralium continuam in omnibus ſpatii punctis actionem involvit ſine qua hæc doctrina omnibus jam probata conſiſtere nequit.

17. Evictum ergo eſt, quod vis viva mobili acquiſita in E (*figuris* 1 & 2) deſcenſu accelerato ex A in E, eſt ad vim vivam ejusdem acquiſitam in H deſcenſu ex A in H, ut area AEea ad aream AHha, non vero (*fig.* 4) ut area LPpl ad aream LQql, poſito quod LP & LQ referant tempora deſcenſus in ſpatiis AE & AH, ordinatæque Ll, Mm, &c. gravitatem corporum. Ex quo ultrò fluit, quod vires vivæ corporum neceſſariò ſint ut facta ex maſſis corporum in quadrata celeritatum mobilium. Quod præcipue ex theoria motus gravium deduce-

ducere ſuſcepimus, etiamſi argumentum à colliſione corporum ſupra (§. 12. 13.) petitum etiam validiſſimum, omnique exceptione majus, nobis videtur.

Poſſet eadem theſis aliis adhuc argumentis æque ſtringentibus probari, quia verò id à diverſis Societatis hujus Imperialis Membris dilucide eſt præſtitum, eorumque in hanc rem cogitata in Actis Academiæ ſimul prodeunt, ab iis nunc abſtinebo, tranſiens jam ad partem elenchticam Quæſtionis de menſura virium. Nam communis ſententia Leibnitiæ oppoſita, quaſi jure quodam præſcriptionis uſa multos Præclaros Hyperaſpiſtes eſt nacta quorum argumenta omnino digna ſunt quæ excutiantur.

Primum quidem mota eſt pluries hæc inſtantia: Quod idea vis vivæ corporum non involvat ideam gravitatis, quandoquidem unumquodque corpus determinata aliqua celeritate præditum ſuam determinatam vim vivam habeat, ſive corpus illud grave ſit, ſive omni gravitate deſtitutum intelligatur; quodque hanc ob cauſſam fruſtra recurratur ad theoriam motus gravium pro menſura virium acquirenda. Concedamus quidem antecedens, nihilo tamen firmior erit conſequentia: eſto quod corpora eſſe poſſint corpora, tametſi non ſint gravia, & quod hæc corpora non gravia tamen ſuos quodque gradus virium vivarum habeant; quid inde concludetur? Sane aliud nihil niſi hoc, vires illas vivas non eſſe gravitatem corporum, neque fluere neceſſario ex gravitate, quod nusquam diximus neque ſtatuimus unquam; quod autem ex deſcenſu gravium nulla ideo peti poſſit menſura virium vivarum, id nullo modo ſequitur ex propoſitione antecedenti. Eſto enim corpus non grave A habens celeri-

tatem quam nominabo *u*, & hoc corpus habebit ideo aliquam vim vivam, quam à gravitate omninò independentem ſtatuam. Sit aliud corpus B alteri quoad maſſam æquale ſed gravitate preſſum, quod cadens ex altitudine *a* acquirat accelerato motu celeritatem æqualem celeritati *u* corporis primi gravitate carentis A. Quæro jam an hæc corpora æqualia & æquivelocia A & B vires vivas æquales habeant, an verò ſecus? non puto quenquam fore, qui vires haſce inæquales dicat; etiamſi enim prius corpus A gravitate (*hyp.*) non urgetur, alterum verò B urgetur, atque adeo hæc circumſtantiarum diverſitas aliquam virium inæqualitatem in utrumque inducere primo intuitu videtur, reapſe tamen nullam inducit, nam ſimulatque corpus B in infimo termino altitudinis *a* reperitur, ibique celeritatem *u* acquiſivit, pone gravitatis actionem ceſſare, corpus iſtud B illic etiam gravitate deſtitutum erit, atque celeritate acquiſita *u* motum ſuum, perinde ac corpus A, æquabiliter continuabit; adeo ut jam habeamus corpora æqualia & æquivelocia A & B non gravia; unde neceſſe eſt, ut vires ipſorum æquales ſint. Concedo verò quod corporis non gravis A vis viva non pendeat à gravitate, an tamen ideo alterius corporis B vis viva à gravitate non fluit? imo verò maxime fluit, cum initio deſcenſus *vim nullam* habuerit, eamque quam demum nactum eſt in fine ſpatii *a* acquiſiverit continuata gravitatis actione. Cum autem vires corporum A & B æquales oſtenſæ ſint, nonne altera alterius menſura eſſe poteſt, & debet, tametſi vis corporis B à gravitate fluens prorſus independens eſt à vi corporis A quæ gravitati ortum ſuum non debet? ex quibus omni-

bus

bus liquet, quod ſupra allata inſtantia noſtræ virium vivarum menſuræ nihil prorſus derogare poſſit.

18. Sed plures aliæ objectiones olim prodierunt à doctiſſ. viris nempe à Dn. Abbate *Catelano*, à *Dioniſio Papino* & aliis, & hæ objectiones omnes in ſubſtantia recurrent in iis quæ non multis abhinc annis V. Cl. *Samuel Clarke* Theologus & Philoſophus Anglus contra Ill. *Leibnitium* paulum poſt hujus obitum diſputavit, in opere quod Anglico & Gallico idiomate edidit Londini ſub titulo, *A Collection of Papers which paſſed between the late Learned* Mr. Leibnitz *and Dr.* Clarke *in the years* 1715 *and* 1716. *London* 1712 *in* 8. Quodque Dn. *Desmaizeaux* ampla præfatione & aliis ſcriptis auctum denuo edidit Gallice, cum titulo *Recueil de diverſes Pieces ſur la Philoſophie, la Religion naturelle, l'Hiſtoire, les Mathematiques, par Mrs.* Leibnitz, Clarke, Newton & *autres Auteurs célèbres. A Amſterdam in* 12. 1720. Jam in nota ad §. 93,-95. quintæ Reſponſionis ad Leibnitium Dn. Clarke non modo Leibnitii argumenta pro noſtra virium menſura confutare ſatagit, ſed etiam locum aliquem Phoronomiæ de hac eadem re ſugillavit. Etſi vero alio loco præcipua ejus argumenta ad examen revocavi, quia tamen id breviſſime factum eſt in ſcripto quod in paucorum manus venit, ideo præcipuas Clarkii objectiones huc adducere & refellere libet, idque tanto libentius quanto oportuniorem nobis occaſionem ſubminiſtrant de viribus vivis theoriam magis illuſtrandi. Primo loco Vir Cl. *Leibnitium* de confuſione & contradictionibus in hoc de viribus argumento admiſſis graviter accuſat, quod ſentiat *eandem virium quantitatem in natura conſervari*, & tamen agnoſcat *non eandem motus quanti-*

titatem manere, ubi per vocabulum *vis*, aut vis *activa* in præſenti quæſtione neceſſariò intelligere debuerit *Impetum* aut *vim impulſivam et relativam corporum motorum*. Sed ſi quicquam aliud hæc Cl. Opponentis accuſatio lepida mihi videtur; aſſumit enim quod Leibnitius ſecum ſentiat, quando ſupponit quod Leibnitius de viribus locutus in iis locis quæ citavit, per hoc vocabulum intelligat impetum ſeu quantitatem motus, ut deinceps quæri poſſet de contradictione & confuſione, cum ab ipſo diſſentit. Sed nullum Vir Doct. memorabit locum in quo Leibnitius per vim activam quam in univerſo conſervari ſtatuit, quantitatem motus ſeu impetum intellexerit; imò contrarium ex illo ipſo elucet, quod quantitatem motus mutabilem, quantitatem vero virium eandem ſemper manere, probare conatus eſt. Hac ergo in re ſibi ipſi Leibnitius non contradixit ſed Cl. Antagoniſta præjudicata opinione abreptus *principium petiit*. Pergit deinceps A dicendo, *id quod Dn. Leibnitio occaſionem dedit ſibi contradicendi eſt, quod per errorem Philoſopho prorſus indignum, vim impulſivam*, ut Clarkius loquitur, *æſtimarit per quantitatem materiæ et ſpatii quod mobile aſcendendo conficit, ſepoſita conſideratione temporis quo aſcenſus fit.* Sed ſi vera ſunt, quæ in §§. 15, 16, 17. apodictice demonſtravi, quod menſuræ virium ſint altitudines ad quas corpora pervenire poſſunt ductæ in vim gravitatis, nullum errorem, nedum talem qui omni Philoſopho indignus ſit, *Leibnitius* admiſit.

19. Quantum ad illud attinet, quod Doct. Antagoniſta habet, *non parum errare* Leibnitium *in eo, quod putet à Carteſianis ac reliquis Philoſophis ac Mathematicis concedi hanc propoſitionem*: Tanta vi opus eſſe ad elevandum corpus A unius libræ ad altitudinem quatuor ulna-

rum

rum, quanta opus ſit ad elevandum corpus B quatuor librarum ad altitudinem unius ulnæ, *cum tempora horum aſcenſuum non ſunt æqualia*, eſſet tantum *error facti*, ſi error eſt, qui ſummæ rei nihil derogare poteſt; præterquam quod ſupra pag. 7. jam ex *Carteſio* ipſo locum allegavi ex quo apparet *Illuſtrem Philoſophum* controverſam hanc propoſitionem ſine ulla limitatione æqualitatis temporis admiſiſſe. Imo id erroneum judicat, cum ſpatii conſideratio confunditur in negotio virium menſurandarum, cum *temporis* aut *celeritatis* conſideratione, & ſententiæ hujus ſolidam demonſtrationem ſupra §§. 15. 16. dedimus. Stante vero demonſtratione in loco citato, concidunt omnia quæ Cl. noſter *Adverſarius* pro ſe porro adducit, quippe quæ in ſolis aſſertionibus ſine omni probatione prolatis, conſiſtunt. Prætendit namque, *quod, ſi Pendulum quoddam Cycloidem deſcribat*, arcus Cycloidis *aſcenſu deſcriptus*, *proportionalis ſit futurus* vi aſcenſionali *in infimo puncto Cycloidis*: hujusque propoſitionis non aliam affert rationem, quam hoc, quod tempora ad aſcenſum requiſita ſint æqualia. Sed quam longe Vir Doctiſs. abſit à vero, patebit poſtquam desenſum ac aſcenſum corporis in Cycloide paulo curatius contemplati fuerimus.

Sit ergo curva ADH (*fig.* 3) Semicyclois verticem in H & axem aH habens, cujus proinde ſemibaſis erit Aa. Eſto corpus C quod deſcenſum incipiat in puncto A, atque accelerato motu cavam cycloidis partem percurrat in ſuppoſitione, quod gravitas ubique uniformis & uniusmodi ſit: itaque initio deſcenſus urgebitur mobile ſecundum directionem tangentis cyclodis in puncto A, vi quam exponit arcus AH, id *Newtonus* primum &

poſtea

poſtea alii autores plures demonſtrarunt, ſed, quod probe notandum, hæc vis tangentalis non eſt vis viva ſed tantum mortua, eſt enim derivata ex vi gravitatis, quæ tantum vis mortua eſt. Delatum poſtea mobile ex A in B urgebitur in hoc puncto etiam in directione tangentis vi mortua quam exponit arcus cycloidis BH, & ita in omni alio puncto cycloidis vi quadam mortua quam exponit arcus cycloidis inter hoc punctum & verticem H; erectæ porro intelligantur in punctis A, B, D, &c. & omnibus intermediis, ad planum cycloidis perpendiculares atque æquales reſpectivis arcubus AH, BH, DH &c. orietur inde ſuperficies cylindrica cujus baſis eſt cyclois ADH, & contendo hanc ſuperficiem totam ejusque partes, menſuras eſſe virium corporis deſcenſu per AH vel partes hujus arcus acquiſitarum. Nam vis acquiſita in infimo puncto cycloidis H, eſt complexus omnium virium mortuarum quibus mobile in punctis A, B, D, H, & omnibus intermediis urgetur, nam quicquid virium habet in H id cunctis hiſce viribus mortuis continue in mobile agentibus acceptum eſt ferendum, adeoque vis in H acquiſita, non major neque minor eſſe poteſt complexu illo virium mortuarum ex quibus reſultavit, & area illa cylindrica complectitur omnes lineas omnium virium mortuarum repræſentatrices. Exempli cauſa ſi in *fig.* 5 AL=AH, BM=BH, DN=DH & ita porro reſpectu omnium reliquorum cycloidis arcuum, atque hæ AL, BM, DN plano cycloidis AaH normales ſint; ſuperficies cylindrica ALMH complectitur omnes AL, BM, DN &c. quæ vires mortuas quibus deſcendens mobile in A, B, D, &c. urgetur, exponunt; adeoq; dicta ſuperficies cylindrica HAL exponit vim in H acquiſitam deſcenſu

per

per arcum AH, propter ſimilem rationem ſuperficies LABM, LADN exponent vires acquiſitas mobili in B & D, initio deſcenſus a quiete exiſtente in A.

Examinandum reſtat quantæ ſint ſuperficies ALH, eiusque partes; ſit arcus DH$=$DN$=s$, ejusque elementum$=ds$, quare elementum ſuperficiei HDN, quod oritur ductu ordinatæ DN$=s$, in elementum arcus HD, fit $=sds$, quare integrando, fit area ipſa HDN$=\frac{1}{2}ss=$ ſemiſſi quadrati arcus DH, adeoque area tota HAL$=$ dimidio quadrati ex AH; areæque ABML, ADNL æquantur $\frac{1}{2}AH^2-\frac{1}{2}BH^2$, & $\frac{1}{2}AH^2-\frac{1}{2}DH^2$. Poſitis iam hiſce, ſequitur, quod vis acquiſita in H deſcenſu per arcum AH, quæ repræſentatur per aream HAL, proportionalis ſit, non arcui ipſi AH, ut putat *Dn. Clarke*, ſed dimidio quadrato arcus eiusdem AH, & tanta quoque eſt initio vis mobilis aſcendentis in cycloide ex H in A. Quod ſi vero deſcenſus incipiat à quiete in puncto D, vis in infimo puncto H acquiſita proportionalis erit, non arcui DH ſed dimidio eius quadrati, & huic æqualis eſt vis corporis in arcu HD aſcendentis.

Quando V. Cl. porro dicit, *quod ſi duo corpora æqualia in diverſis diſtantiis ab axe alicuius libræ in ejus brachia gravitent*, vires *eorum corporum futuræ ſint*, ut arcus *quos deſcribunt*, *quod eos* æqualibus temporibus *conficiant*, veram rationem, cur dictæ illæ vires ſint ut arcus deſcripti, non attingit. Nam hæ vires ſunt ut arcus, non ideo, quia arcus æquali tempore deſcribuntur, ſed quia gravitatis actio continua eſt, & in omnibus arcuum punctis hæc corpora vi quadam mortua æquali urgentur.

Sed pergit noſter dicendo, *Si globi duo æquales in plano horizontali viribus inæqualibus impellantur, tempori-*

bus æqualibus, ſpatia deſcribent viribus impellentibus proportionalia. Aut *ſi globi inæquales viribus æqualibus impellantur, deſcribent temporibus æqualibus ſpatia maſſis ſuis reciproce proportionalia.* Utraque hæc propoſitio eſt falſa. Sint enim primum globi æquales A, A & quieſcentes, quorum prior impellatur globo B cum celeritate *b*, alter vero globo C cum celeritate *c*; per regulas communicationis motus, acquiret prior globus celeritatem $\frac{2Bb}{B+A}$, & alter globus A a globo impellente C accipiet celeritatem $\frac{2Cc}{A+C}$, eſt ergo ſpatium primo globo A deſcribendum ad ſpatium ab altero æquali tempore peragrandum, ut prior fractio $\frac{2Bb}{A+B}$, ad alteram $\frac{2Cc}{A+C}$, ſed hæ fractiones non ſunt ut vires impellentes, quæ ſecundum hypotheſes *Autoris* ſunt ut *Bb* & *Cc*, quare prior ejus propoſitio eſt falſa.

Videamus an altera locum habeat nec ne? Sint iam globi inæquales A & B quieſcentes qui ambo impellantur à globis æqualibus C, C celeritate æquali *a*; per easdem regulas communicationis motus, accipiet globus A celeritatem $\frac{2Ca}{A+C}$, & globus B celeritatem $\frac{2Ca}{B+C}$, & hæ celeritates ſunt ut ſpatia quæ ambo globi poſt impulſus æquali tempore deſcribent. Hæc vero ſpatia *non* ſunt maſſis globorum A, & B proportionalia ut Dn. *Opponens* dicit; quare & altera ejus propoſitio eſt falſa. Propterea corruunt omnes conſequentiæ, quas Vir Cl. adverſus *Leibnitium* ex præmiſſis ſuis nectit, & dicere auſim, in omnibus fere iis quæ ſequuntur perpetuam regnare petitionem principii, quia Doct. *Opponens* fere ubique ſupponit, quod vires corporum ſint

ut

ut quantitates motus, quod tamen a *Leibnitio* negatur, atque id eſt de quo quæritur, debuiſſet itaque alicubi idoneam ſuæ theſeos demonſtrationem proferre, priusquam Leibnitio & aliis, qui hac in re cum ipſo ſentiunt, neſcio quas *contradictiones* aliasque *abſurditates* objiceret. Videbitur fortaſſe dediſſe demonſtrationem ſuæ propoſitionis in ſequenti periodo quæ ita habet: ,, *Galilæus* in ſuppoſitione gravitatis *uniformis*, demonſtravit motum *Projectorum* in mediis non reſiſtentibus, omnesque Mathematici, ne quidem Cl. *Leibnitio* excepto, propoſitionibus ejus aſſentiuntur. Jam vero ſi *tempus*, quo corpus ſpatium ſuum perlabitur in partes æquales, diviſum intelligatur; quoniam gravitas uniformis eſt, atque adeo æqualibus temporis partibus æqualiter agit, oportet ut actione ſua corpori imprimat impertiaturque *temporibus æqualibus*, *vires*, *velocitates*, *motusque æquales*. ,, Sed hæc ipſa conſequentia, quatenus ad vires ſpectat, falſa eſt, ut verum eſt, temporibus æqualibus, æquales celeritates motusque æquales gravitatis uniformis actione continua generari. Nam ad producenda velocitatis incrementa, gravitas perinde agit in corpora mota ac in quieſcentia; adeo ut temporibus æqualibus æqualia velocitatis incrementa mobili adiiciantur, ſive id in motu ſit, ſive quieſcat. Sed res aliter ſe habet cum virium incrementis, in hiſce enim computandis celeritatis præſentis ratio eſt habenda, nec dici poteſt hæc virium incrementa eſſe ſimpliciter, ut incrementa temporis, ſed potius in compoſita ratione ex celeritatibus iam acquiſitis & temporis incrementis; hoc eſt ut incrementa ſpatiorum, ſi nempe maſſæ corporum æquales fuerint, quod pluribus iam ſupra probatum

eſt. Poſteaquam varias alias conſequentias ex primaria illa, quam modo confutavi, elicuit Vir Cl. me denique ipſum adoritur, hæc ſcribens. *Sed* Hermannus Leibnitii *partes ſecutus contra eos qui vires corporibus cadentibus acquiſitas proportionales eſſe ſtatuunt temporibus quibus deſcenſus illi fiunt, aut velocitatibus acquiſitis*: Hermannus *inquam aſſerit id falſæ ſuppoſitioni, quod ſcilicet corpora in altum jacta temporibus æqualibus æqualem a gravitate impulſuum numerum accipiant, inniti. Hoc idem eſt ac ſi* Hermannus *gravitatem non eſſe uniformem, dixiſſet idque adeo eſt* Galilei *theoriam in quam omnes Geometræ conſentiunt, funditus evertere. Exiſtimo Hermannum ſibi imaginari, quod quo velocior ſit motus aſcenſionalis, eo plures corpora accipiant impulſus, quia ipſis occurrunt particulæ* (imaginariæ) *quæ gravitatem producunt. Atque ita pondus corporum majus erit cum aſcendunt, et minus cum deſcendunt.* Ex hiſce cognoſcere poteſt Lector quam ſagax ſit induſtria Cl. *Antagoniſtæ* in eliciendis conſequentiis, & Adverſariorum ſuorum ſenſu perſcrutando: Scripſi utiq; in Phoronomia falſæ hypotheſi ſuperſtrui ſententiam eorum qui vires corporum aſcendentium per tempora aſcenſuum menſurant, quod tacite ſupponant corpora æqualibus temporibus æqualem impulſum numerum ſubire, cumque citato loco præſertim contra *Papinum* diſputaverim, vocabulo *impulſuum* uſus ſum, quod ipſe prior id adhibuerit ad deſignandas *reſiſtentias* quas aſcendens mobile ſuperandas habeat: Exinde protinus concludit Dn. *Antagoniſta*, hoc idem eſſe ac ſi gravitatem non uniformem eſſe dixiſſem, idque adeo eſſe Galilei theoriam funditus evertere, ſi autem quæris nexum inter hanc propoſitionem *gravia verticaliter in altum projecta*

jecta non *temporibus æqualibus*, *ſed aſcendentia per altitudines æquales*, *reſiſtentias à gravitate æquales patiuntur*, & hanc, *gravitatem non eſſe uniformem*; hunc nexum Vir Eximius nusquam oſtendit, aut ſi unquam oſtendere poterit, mihi erit magnus Apollo; interea vero nunc criticum agit & animi mei ſenſum non expreſſum verbis, ſcrutatus eſt; arbitratur enim mea opinione corpora aſcendentia eo plures impulſus à gravitate accipere, quo velocior ſit motus aſcenſionalis, quia ipſis occurrant particulæ quæ gravitatem producunt, quas particulas ipſe *imaginarias* vocat, haud dubie ideo, quia gravitas ipſi eſt *qualitas occulta*. Sed ſepoſitis iocis, ut Cl. Viro directe reſpondeam: in pluribus locis præſentis ſchediasmatis geometrice probatas vidit has duas propoſitiones 1. Ex eo, quod gravitas uniformis eſt, menſuræ virium corporum, ſunt in compoſita ratione ex maſſis & altitudinibus quas in altum projecta velocitatibus initialibus iis, quas corpora habent, percurrere poſſunt. 2. Sin vero vires illæ eſſent in compoſita ratione maſſarum & temporum aſcenſionis, gravitas non uniformiter ſed ſubſultim ageret. Itaque in Cl. *Adverſarii* hypotheſi gravitas non eſt uniformis, adeoque Galilei theoria deſtruitur, quæ in noſtro ſyſtemate ſarta tectaque manet.

Sed examinandum eſt grave argumentum, quod Vir Cl. adhuc contra nos adducit. *Si vis* (inquit ille) *quam corpus cadendo acquirit eſt ut ſpatium deſcriptum, dividatur tempus in partes æquales, et ſi prima temporis parte acquirat partem unam virium, duabus primis temporis partibus acquiret quatuor virium partes; tribus primis partibus temporis acquiret novem partes virium, et ita deinceps. Quare ſecunda temporis parte acquiret*

tres virium partes; *tertia temporis parte acquiret quinque partes virium*, *et ſic porro.* Hæc omnia optime ſe habent, ſed elumbes ſunt conſequentiæ quas inde ducit, *ſi ergo*, pergit ille, *ſupponatur actio gravitatis has vires producentis*, *unius eſſe gradus in medio primæ partis temporis*, *in Medio ſecundæ*, *tertiæ*, *quartæ partis temporis*, *tres*, *quinque*, *ſeptem gradus habebit*, *et ſic deinceps.* Sed hoc ipſum eſt falſiſſimum, actio enim gravitatis in medio cujusque temporis eadem eſt ut initio & in fine. Quam validum ſit Cl. *Antagoniſtæ* argumentum iſtud, vel exinde quoque cognoſcetur, quod ſimili modo probari poſſit ex eo, quod ſpatia æqualibus temporibns deinceps deſcripta, ſint ut numeri impares 1, 3, 5, &c. quod gravitas quæ efficit, ut hæc ſpatia mobili deſcribantur ſit ut numeri iidem impares; nam ſi ſupponatur quod actio gravitatis quæ efficit ut hæc ſpatia percurrantur in medio primi temporis eſſe unius gradus, gravitatis actio in medio ſecundæ, tertiæ, quartæ partis temporis, tres, quinque, ſeptem gradus habebit, & ita deinceps; quare tali argumento Cl. viri probatum eſt ex eo, quod gravitas *uniformis* eſt, *gravitatem non eſſe uniformem.* Videtur autem vir Doctiſſimus ideo ſic argumentatus eſſe, ut concludere poſſet his verbis: *Hoc eſt actio gravitatis proportionalis erit tempori et velocitati acquiſitæ.* Sed noſſe vellem in medio cujusnam temporis actio gravitatis proportionalis ſit facto ex tempore in celeritatem? quando quidem hoc ex ex præmiſſis non cognoſcitur, in hiſce enim ordinem temporum æqualium recenſuit in quorum medio gravitatis actio ſequitur progreſſionem numerorum imparium; ſed Oedipo opus eſt qui inde exſculpat actionem gravitatis facto ex tempore in celeritatem proportionari,

ac

ac denique initio temporis, gravitatem eſſe nullam. Si V. Cl. dixiſſet initio primi temporis vim vivam mobilis nullam eſſe, nihil a veritate alienum protuliſſet, ſed quod gravitas ibi nulla eſſe debeat, nunquam legitimo ratiocinio ex noſtro ſyſtemate deducetur.

Venio tandem ad *Achillem* Cl. Antagoniſtæ qui noſtram virium æſtimationem ipſi penitus evertere videtur, nam diſputationem hanc ſequentibus verbis finit: Ut præſens controverſia demonſtrative decidatur, ex „ duobus *radiis* ſeu *filis* æqualis longitudinis pendeant glo- „ bi Chalibei ita, ut cum globi ſuſpenſi manent & ſeſe „ tangunt, *radii* ſeu *fila* parallela ſint. *Alteruter* ho- „ rum globorum *idem* ſemper ſit & ab altero ad eandem „ in omnibus experimentis diſtantiam abducatur. *Alter* „ globus ſit arbitrariæ magnitudinis abducaturque in par- „ tem oppoſitam ad diſtantiam ponderi ſuo reciproce „ proportionalem. *Ambos* hos *Globos* eodem tempo- „ ris momento labi ſinas ita, ut in infimo loco deſcen- „ ſus in quo ſuſpenſi hærebant antequam à ſe invicem di- „ ducti eſſent, ſeſe attingere poſſint. *Primus* Globus „ *eodem ſemper modo reſiliet*, hoc eſt, ad eandem altitu- „ dinem. Quare *vis* alterius *eadem* ſemper eſt, quoties „ ejus celeritas ponderi ſuo reciproce proportionalis eſt. „ Et per conſequens pondere eodem manente, *vis* eius „ *velocitati* proportionalis erit. Q.E.D.

Ut hujus prætenſæ demonſtrationis vis melius capiatur, placet totum negotium per *figuram 6*. exponere. Sint fila æqualia DF, EG ſuſpenſa in D & E: in imo ipſorum alligati ſint globi chalibei, nempe filo DF globus A, & filo EG globus B. Oportet ut diſtantia punctorum ſuſpenſionis DE æquet ſummam ſemidiametrorum

trorum globorum A & B, aut ſi vice globi B alius major vel minor adhibeatur quem dicam C, ut diſtantia DE æquet ſummam ſemidiametrorum hujus globi & globi A, ad id, ut quoties fila DF & EG in ſitu verticali ſunt, globi A & B, aut globi A & C, ſe ſe contingant: intelligatur linea horizontalis MN tranſire per centra globorum & puncta F, G deſignare hæc centra. Centro D radio DF deſcriptus ſit arcus FO, centroque E radio EG arcus GP. Sit arcus FH ad arcum GI, ut globus B ad globum A, abducaturque globus A ex F in H, & globus B ex G in I, & ambo ſimul deſcendere incipiant ex H & I, eodemque tempore pervenient per arcus HF & IG in F & G & illic inter ſe collidentur, ita ut uterque regrediatur in arcu in quo ceciderat, nempe globus A regredietur poſt impulſum ex F in H, & globus B ex G in I, ſepoſita conſideratione reſiſtentiæ aeris. Poſt hoc experimentum eximatur globus B ex G, ibique alius globus C ita alligetur, ut diſtantia DE jam æquet ſemidiametrorum ſummam, ſitque C ad B ut arcus major GK ad arcum minorem GI. Nunc ponamus globos A & C ſimul deſcenſum incipere in H & K, & æquali iterum tempore deſcribent accelerato motu arcus HF & KG, atque in F & G ſibi invicem cum celeritatibus quas arcus HF & KG exponunt, obviam venient; continget vero iterum poſt impulſum, ut globus A reſiliat ex F in H, & globus C ex G in K. Adeoque globus A in utroque experimento ad eandem altitudinem HL reſilit, ex quo Cl. *Antagoniſta* concludit, quod vis alterius globi B vel C etiam eadem ſemper ſit, quoties celeritas finalis globi B eſt ad celeritatem finalem globi C, ut hic globus ad illum.

Sed dicam vix aptius medium mihi ſuppeditari potuiſſe

ad

ad confutandam Cl. viri menſuram virium,quam hoc ipſum experimentum quod pro ſe adducit. Primum enim concluſio ejus,quod vires globorum B & C æquales ſint aliunde peti non poteſt,quam ex hac ſuppoſitione, quod tam vis globi B quam vis globi C æqualis ſit vi globi A eodem ſemper tenore reſilientis. Hæc vero ſuppoſitio eſt *mera petitio principii*, ſed ne hoc gratis dixiſſe videar, probabo ſecundo, quod, poſitis iis omnibus quæ in experimento poſita ſunt, vis globi celerioris C *major* ſit vi alterius B. Hoc autem apodictice probatum erit, poſtquam oſtendero quod *commune centrum gravitatis* globorum A & C in arcubus FH & GK aſcendentium *altius* aſſurgat, quam *commune centrum gravitatis* globorum A & B in arcubus FH & GI aſcendentium: nam ſi hoc eſt,vires globorum A & C *majus* quid præſtant, quam vires globorum A & B, hoc eſt vis globi A plus vi globi C *major* eſt vi globi A + vi globi B, adeoque cum (*hyp*) vis globi A utrinque eadem ſit, reſtat vis globi celerioris C *major* vi globi tardioris B. Itaque tantum probandum eſt, commune centrum gravitatis globorum A & C *altius* aſcendere, quam commune gravitatis centrum globorum A & B. In horizontalem NL demittantur ex terminis arcuum H, I, K, perpendiculares HL, IM, & KN, atque dicantur $HL = a$, $IM = b$, $KN = c$; item arcus $FH = l$, $GI = m$ & $GK = n$ ac denique diameter horum arcuum ſeu 2DF, vel 2EG $= d$. His poſitis eſt (*hyp*) arcus GK (n) major arcu GI (m)adeoque $ln > lm$, hoc eſt fractio $(lln + lnn):(dl + dn)$ $>$ fractione $(llm + lmm):(dl + dm)$. Cum autem arcus FH, GI, GK, minimi ſint, confundentur cum ſuis chordis, eruntque adeo $ll = ad$, $mm = bd$, et $nn = cd$, quibus

F in

in præcedentibus fractionibus ſurrogatis, fiet $(an+cl):(l+n)$ major quam $(am+bl):(l+m)$, vel quod eodem recidit, $(anA+clA):(lA+nA)$ major quam $(amA+blA):(lA+mA)$, conſtructio vero præbet æquationes $lA=mB$, & $lA=nC$, itaque in prima fractione ſurrogando nC pro lA, & mB pro lA, in ſecunda, fiet $(Ana+Ccn):(nA+nC)$ vel $(Aa+Cc):(A+C)$ maior quam $(Aam+Bbm):(Am+Bm)$ vel $(Aa+Bb):(A+B)$. Atqui ex *centrobaricis* conſtat, quod prior fi actio $(Aa+Cc):(A+C)$ denotet diſtantiam communis centri gravitatis globorum A & C in A & K exiſtentium, ab horizontali LN, alteraque fractio $(Aa+Bb):(A+B)$, diſtantiam communis centri gravitatis globorum A & B exiſtentium in H & I. Quare centrum gravitatis globorum A & C *altius* aſſurgit quam centrum gravitatis globorum A & B, propterea vis globi C *major* eſt vi globi B. Quod erat demonſtrandum.

Nemini ſcrupulum moveat,quod in præcedenti demonſtratione arcus FH, GI, GK indefinite parvos ſuppoſui, ut cum ſuis cordis confundi poſſint; nam demonſtratio etiam obtinet cum arcus illi ſunt finitæ magnitudinis, tunc vero debent globi A, B, C non arcubus FH, GI, GK reciproce proportionales eſſe, ſed chordis horum arcuum.

De

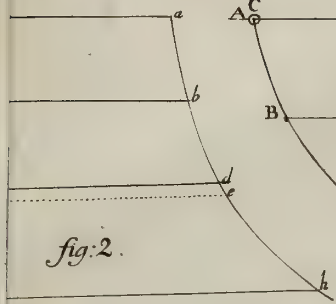


fig: 2.

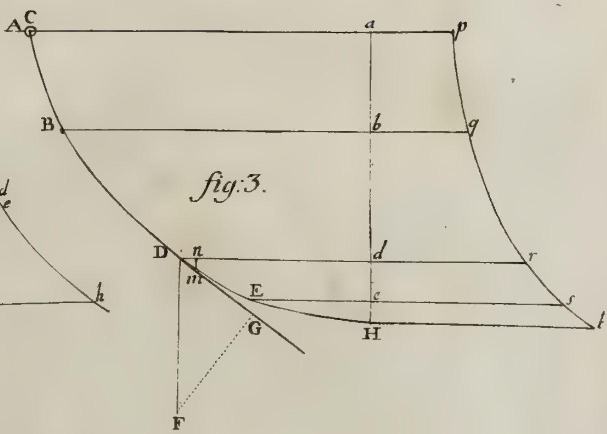


fig: 3.

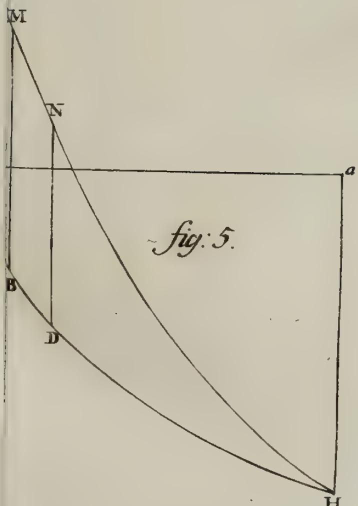


fig: 5.

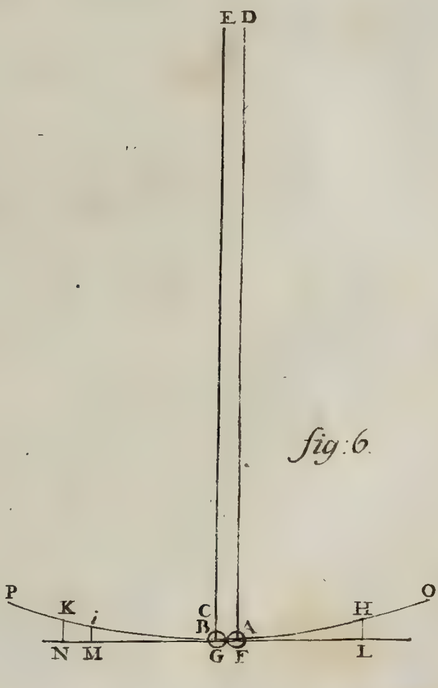


fig: 6.

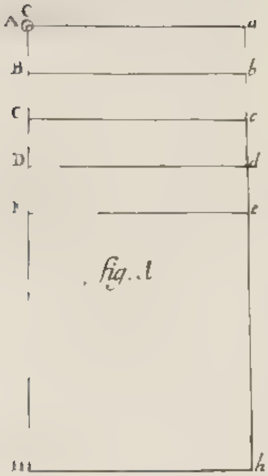


fig. 1

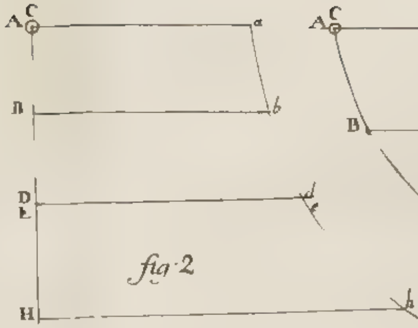


fig. 2

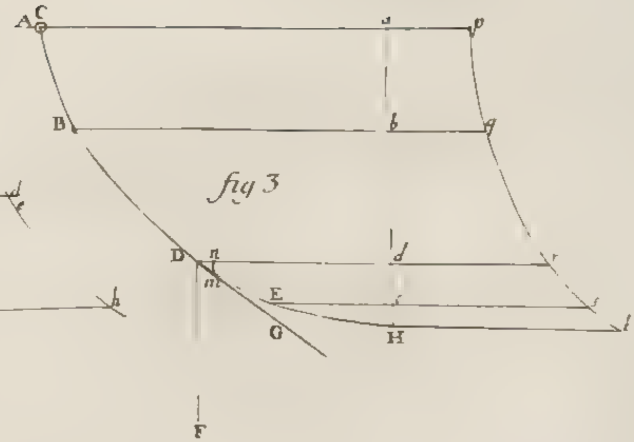


fig. 3

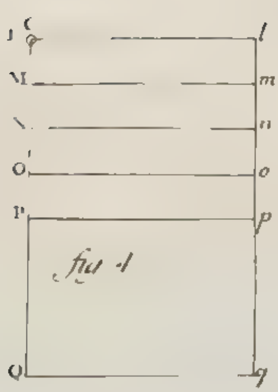


fig. 4

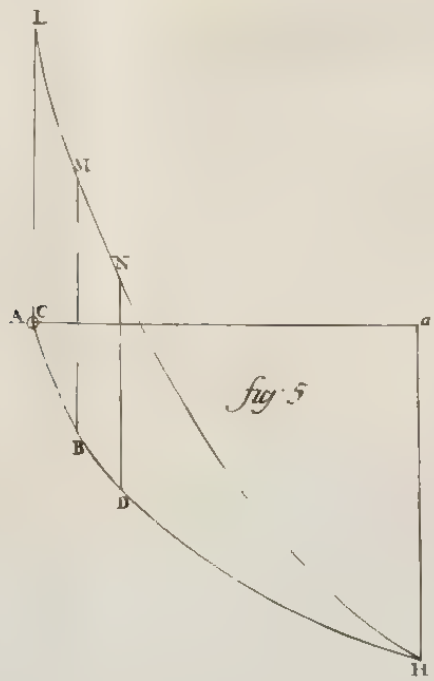


fig. 5

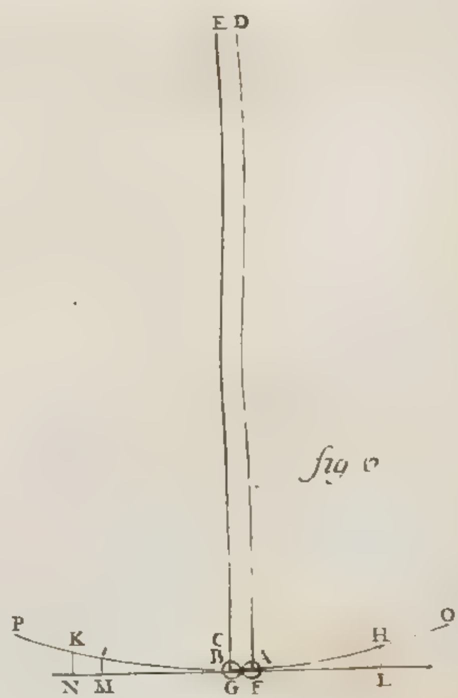


fig. 6

DE VIRIBUS CORPORI MOTO INSITIS

&

Illarum Menſura,

Demonſtrationes Mechanicæ,

Auctore

Georgio Bernhardo Bülffingero.

IN *primis* Academiæ Scientiarum Conventibus facta eſt de Menſura Virium motricium, & natis inde controverſiis mentio. Viſum eſt, non id ſine uſu fore, ſi qui Sociorum ſuam de iſthoc argumento ſententiam ex inſtituto dicant: atque inter illas placuit & *meam* audiri. Non multa promitto, neque eximia: ſed nova tamen aliqua, hoc eſt, publice, quod ſciam, nondum vulgata. *MM. Sept. et Octob. 1725.*

Nolo vero recenſum hic inſtituere vel virorum vel ſcriptorum, quibus agitata eſt de viribus corporum vivis diſceptatio: occurrent aliqua in principio ſectionis ſecundæ. Lubet ſuffragari *Leibnitio*, qui vires corporum inſitas *ex facto maſſæ in quadratum celeritatis* æſtimat. Argumenta in hanc rem plura præſto ſunt, & diverſi generis, inventa variis Auctoribus. *Plerique* axiomatis loco requirunt, ut *vires* totæ cenſeantur *effectibus* integris *proportionales*. Tum vero effectus metiuntur vel cum *Leibnitio* ex aſcenſu gravium retardato; vel cum *Jo. Bernoullio* ex elaſtris, quæ tendi a corpore moto

poſſunt; vel cum *Hermanno* noſtro ex percuſſionibus ſucceſſivis ejusdem corporis elaſtici ad diverſa alia; vel cum *Jo. Polenio* (& *s'Graveſandio*) ex foraminibus, quæ corpora gravia lapſu ſuo imprimunt corporibus mollibus.

Alia ex virium geneſi ſumuntur: qualia ſunt illud *Hermanni* oriundum ex deſcenſu gravium; & nata per replicatas gravitatis ſolicitationes vi viva: (atque alterum *s'Graveſandii*, quo numerum elaſtrorum motus acceleratos generantium attendit, & in ſummam colligit.)

Prior claſſis pertinet proxime ad vires, quas infra *mixtas* vocabimus. Itaque non indignum publica luce viſum eſt, ſi de viribus quoque *puris* demonſtratio prodiret immediata: maxime cum ea duplici modo inſtrui poſſit, quorum altero effectus ad cauſam refertur; altero autem, ſine iſtius axiomatis interventu, æquatio inter vires unas & alteras inſtituitur, atque ex ea ipſa derivatur virium menſura.

Talem Sectio *prima* demonſtrationem exhibebit, quæ ſe mihi obtulit, cum metaphyſicis diſtringerer cogitationibus; indicatam breviter in *Dilucidationibus* meis *Philoſophicis* de Deo, Anima & Mundo, *Tubingæ* editis, Sect. II. Cap. 3. §. 174. p. 173.

Poſterior argumentorum claſſis ad motus *gravium* acceleratos ſemper attendit, neglectis motu horizontali, & doctrina de percuſſione, quam huic negotio minus aptam judicari contigit. Eratque illa, ut verum fatear, non nihil ab hoc negotio remotior: non erat autem aliena. Cum examinarem difficultates, ſententiæ Leibnitianæ ex percuſſionum doctrina objectas, non potui non in novam ejus demonſtrationem, etſi aliud agens, incidere. Ipſa virium vivarum in corpore elaſtico per impulſum facta

gene-

geneſis docuit me menſuram, quam in ſectione *ſecunda* prolixiori inter plures alias hujus argumenti dilucidationes exhibebo.

Quoniam fieri non poteſt, ut *difficultatum* Leibnitio propoſitarum *ſolutiones* ſine memorabili commentationis hujus defectu plane abſint: itaque illas non poſſum non intertexere dicendis. Sed non ideo me falli neſcium, aut egregiis utique viris ſuperiorem puto. Non me illis iudicem obtrudo; ſed collocutorem adiungo.

Sectio Prima,

ſive,

DE MENSURA VIRIUM
CORPORI MOTO INSITARUM DEMONSTRATIONES.

Definitiones.

I.

VIs corpori *moto inſita* dicitur principium illud, per quod corpus aliquod naturale actu movetur: Cujusmodi eſt in corpore libere cadente, vel violenter projecto. Vocatur etiam vis *viva.* *Mortua* vero, quæ ad motum producendum tendit quidem, ſed propter impedimenta ſibi objecta illum nondum producit: qualis eſt gravitas in corpore ſuſpenſo. Vis inſita ſive viva, prout in

motu ſuo libera perſiſtit, vel impedimentis debilitatur: dicitur vel pura vel mixta. *Mixta*, ſi producendo effectum ſuum conſumitur, uti eſt in corpore gravi aſcendente; viva *pura*, ſi in motu perſeverat, non per illum conſumitur, qualis eſt corporis in vacuo moti.

Schol. Appellationem & Definitiones ſumſi a Leibnitio in Actis Er. 1695. p. 149. & Chriſtian. Wolfio in El. Mech. §. 9. 10.

II. *Directionem* motus voco viam illam, in qua centrum gravitatis corporis incedit, ſi motus eſt actualis, vel incederet, ſi motus ſequeretur: ſive viam illam, ſecundum quam nituntur & impellunt Vires. Si via hæc concipitur ut in linea, voco directionem ſimplicem, vel *unius dimenſionis*: Si in plano poſita, & ex directionibus ſimplicibus compoſita, voco directionem *duarum dimenſionum*: ſi in ſolido, orta ex directionibus plurium planorum, voco directionem *trium dimenſionum.*

Fig. 1. III. *Vim* inſitam *ſecundum* AB, vel ſecundum AC illam dico, cuius directio & celeritas exponitur per lineam AB, AC.

Fig. 2. IV. Si corpus A concipiatur ſimul habere vim ſecundum AB, & vim ſecundum AC, ſic, ut eodem tempore transferatur & ſecundum directionem AB celeritate ut AB, & ſecundum directionem AC celeritate ut AC: tum ego vim illam ex utriusque huius concurſu reſultantem, dico τὸ *reſultans* ex prioribus, vel & *vim compoſitam*; vocabulo circa motus iam recepto.

Coroll: Patet igitur, vim compoſitam nihil aliud eſſe, quam vim, quæ ſola idem perfecte phænomenon præſtaret, quod nunc concipitur a pluribus invicem coniunctis proficiſci.

V. Si

V. Si Directiones illæ virium ſecundum AB & ſecundum AC ſint ad ſe invicem perpendiculares, tum vires illas voco *indifferentes*, intellige ad ſe invicem; quia neutrius directio afficit directionem alterius.

VI. Si Directiones illæ comprehendant angulum acutum, vires dico *conſentientes*;&, ſi angulus fiat infinite acutus, adeoque directiones tandem coincidant, vires appello *coincidentes*.

VII. Si directiones memoratæ faciant angulum obtuſum, vires voco *diſſentientes*; vel, ſi angulus fiat infinite obtuſus, adeoque directiones tandem ſint directe contrariæ, vires nomino *repugnantes*.

Schol. Quando vim ex repugnantibus compoſitam dico, non id volo, inexiſtere illas corpori ſic, ut id in contrarias ſimul moveatur plagas: ſed intelligo illud, quod ſupereſt ex viribus, quæ in plagas contrarias diriguntur, &, ſi divulſæ eſſent, moverentur.

VIII. Si Directiones virium duarum plane ſe non interſecent, vires appello *disjunctas* vel *parallelas*. Tales ſunt eæ, quæ in diverſis ejusdem corporis in directum moti partibus inexiſtere concipiuntur.

Schol. Obſervandum eſt, hunc caſum plane non reſpondere ideæ illi, quæ habetur in motibus compoſitis; hoc enim caſu directiones non exponi poſſunt per latera alicujus parallelogrammi, quod tamen in ceteris omnibus fit, eo ſcilicet ordine, qui in rebus naturalibus obſervatur, ut (Leibnitiano verbo) extrema recidant in idem; angulus e. g. infinite acutus in coincidentiam, infinite obtuſus in repugnantiam.

IX. *Fun-*

IX. *Functionem* alicujus *lineæ* voco quantitatem quamcunque ex linea illa ſola vel cum quantitatibus aliis conſtantibus utcunque compoſitam.

X. *Functiones* duarum linearum *ſimiles* voco quantitates, quæ componuntur ex conſtantibus utrinque iisdem, & lineis ipſis eodem plane modo adhibitis: vel clarius: ſi in functione lineæ AB relinquas conſtantes & ſigna omnia, & ſolum pro linea AB ſubſtituas lineam AC, quantitates illas compoſitas voco functiones ſimiles.

XI. *Actionem* alicujus vis dico ipſum ejus exercitium, quo ſeſe dato tempore ad motum producendum applicat, una cum modo applicandi: ſi duæ pluresve vires ad eundem motum producendum concurrunt, actionem ex illis actionibus ſimplicibus reſultantem voco *actionem compoſitam*.

Coroll. 1. Adeoque in viribus *vivis puris* ſimplicibus actionem cum Leibnitio metior per factum virium illarum in tempus; Tanto enim maior actio eſt, quanto longiori tempore durat uniformiter, & tanto maior, quanto vires ſunt maiores; Neque in puris ſimplicibus differt modus applicandi unus ab altero. Igitur in ſymbolis, expoſita actione per A, vi viva pura per V, & tempore per T, eſt $A=VT$.

2. Conſequenter, ſi duæ vires vivæ puræ ſeſe agendo non afficiant, iuvent vel impediant, agant autem per tempora æqualia, actiones earum ſunt ut ipſæ vires; hæ enim vires ſpectari poſſunt, ut ſimplices.

3. Si autem duæ vires ſic applicentur, ut una agat in alteram, tum in æſtimatione actionum ex datis viribus, vel virium ex datis actionibus, attendi ſimul debet, an mo-

modus applicandi inferat differentiam? qualem? & quantam?

Schol. In viribus *mortuis*, ſive preſſionibus, actio idem eſt, quod alias momentum vocatur, adeoque menſuratur ex intenſitate potentiæ agentis in viam, quam dato tempore percurrit, vel ex magnitudine obſtaculi in viam, per quam cedit. Patet enim, hiſce poſitis adeſſe menſuram eorum omnium, quæ in definitione actionis involvuntur; adeſt nimirum cum vi ipſa modus etiam applicandi. Ceterum, quæ de actione virium hic dicuntur, pertinent præcipue ad ſectionem *ſecundam*, ubi plenius intelligentur.

Axiomata.

I. Corpus, quod vi ſimplici movetur, habet celeritatem & directionem conſtantem, ſi abſtrahas ab impedimentis externis.

II. Si vis una ceteris omnibus paribus maiorem producit motum abſolutum, quam altera, vis prima maior eſt, quam ſecunda: ſi ceteris paribus eundem motum abſolutum minori tempore producit, etiam maior eſt.

III. Si vires corporis A ſecundum AB æſtimantur ex functione quacunque lineæ AB, celeritatem & directionem virium exprimentis: etiam vires corporis A eiusdem vel æqualis ſecundum AC æſtimantur, ex functione ſimili lineæ AC, exponentis celeritatem & directionem huius vis ſecundæ. *Fig.* I.

Schol. Pendet hoc axioma ex principio metaphyſico, quod Leibnitius in Novellis Bælianis expoſuit: ordinatis ſcilicet datis ordinata eſſe quæſita; adeoque datis ſimilibus quæſita eſſe ſimilia. Et hoc ipſum ex

generaliori altero oritur, quod ſcil. nulla ſit differentia, ubi nulla eſt ratio differentiæ. Poteſt igitur demonſtrari hoc axioma, ſi quis poſtulet.

Lemmata.

I. Corpus viribus coniunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribit, quo latera ſeparatis.

II. Et hinc patet compoſitio vis directæ ſecundum
Fig. 2. AD ex viribus quibusvis obliquis ſecundum AB & BD;
3. 9. & viciſſim reſolutio vis cuiusvis directæ ſecundum AD in obliquas quascunque ſecundum AB & BD.

Schol. Enunciavi hæc verbis *Iſ. Newtoni Princ.* p. 13. Intelligo autem illa ſecundum definit. tertiam, vi cuius per lineas AB, AC, AD exprimitur motus, qui in dato tempore a vi data uniformiter ſequeretur; adeoque & celeritas a viribus ſecundum AB vel AC agentibus oriunda. Ex motu enim ipſo ſumitur demonſtratio Newtoni & aliorum omnium: Motus autem ſecundum AB, AC, AD, non eſt ſine vi ſecundum AB, AC, AD,

III. In motu æquabili ſpatia eodem tempore percurſa ſunt ut celeritates. Conſtat id ex mechanicis.

Fig. 2. IV. Nullæ dantur functiones ſimiles laterum AC & CD, quæ ſimul ſumtæ, ſint in omni Triangulo Rectangulo æquales functioni ſimili hypotenuſæ AD, præter quadrata.

Demonſtratio.

Vt hoc intelligatur, aſſumo formulam univerſalem, functiones alicuius lineæ poſſibiles omnes complexam:&, quid ex ſuppoſita poſſibilitate functionum aliarum ſimilium ſequatur, inquiro. Deprehendo vero, quamprimum a quadratis diſceſſero, emergere talia, quæ oſtendant,

non

non dari functiones ſimiles deſideratis conditionibus alias. Sit AC=A, CD=B, AD=$\sqrt{(A^2+B^2)}$. Functiones harum linearum [A], [B], [$\sqrt{(A^2+B^2)}$], erunt exprimendo illas univerſaliter & ſimiliter: *Fig.* 2.

$$[A]=mA^a+nA^b \text{ \&c.}+(pA^d+qA^e\text{\&c.})^\alpha+(sA^g+tA^h\text{\&c.})^\gamma(xA^i+yA^l\text{\&c})^\delta\text{\&c.}+$$

$$[B]=mB^a+nB^b\text{\&c.}+(pB^d+qB^e\text{\&c.})^\alpha\text{\&c.}+(sB^g+tB^h\text{ \&c.})^\gamma(xA^i+yB^l\text{\&c})^\delta\text{\&c.}+\text{--}$$

$$[\sqrt{(^2+B^2)}]=m\sqrt{(A^2+B^2)}^a+n\sqrt{(A^2+B^2)}^b\text{ \&c.}+\text{\&c.}+\text{\&c.}\text{——in Infin.}$$

Videtur quidem aſpectus formularum primus longam & tædii plenam demonſtrationem minari: Sed brevem facient *duo compendia*; quorum *altero* oſtendam, functionem compoſitam nullam convenire inſtituto noſtro; *altero*, inter ſimplices ſolam convenire poteſtatem quadraticam.

Sume ex compoſitis ſimpliciſſimam; habebis

$$mA^a+nA^b+mB^a+nB^b=m\sqrt{(A^2+B^2)}^a+n\sqrt{(A^2+B^2)}^b$$

& conſequenter

$$m=\frac{n\sqrt{(A^2+B^2)}^b-n(A^b+B^b)}{(A^a+B^a)-\sqrt{(A^2+B^2)}^a}$$

Hic vero in valorem coefficientis *m* ingrediuntur valores crurum A & B: Valores iſti in triangulis diſſimilibus ſunt diſſimiles: adeoque valor coefficientis varius: & functiones aſſumtæ nequaquam ſimiles pro omnibus rectangulis. Manetque hoc incommodum, ſi vel plures duobus ſimplicibus; vel terminus aliquis complexus ex ſequentibus aſſumantur: illi enim, cum ſimpliciſſimi

 ſunt,

ſunt, faciendo ex. gr. $\alpha = 1$, recidunt in caſummodo examinatum. Generaliter itaque verum eſt, functionem compoſitam negotio noſtro nullam congruere.

Sit iam ſecundo loco functio non compoſita, ſed uno conſtans termino: erit

$$mA^a + mB^a = mV(A^2 + B^2)^c$$

ſive $$A^a + B^a = (A^2 + B^2)^{\frac{c}{2}}$$

unde $$(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}} = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$$; ubi oculis patet, quando $a = 2$, haberi æqualitatem.

Ut vero intelligatur, nullam dari poteſtatem aliam; notandum eſt, in extractione radicum ex aggregato duorum terminorum, poſt extractionem ex ſingulis terminis factam, requiri adhuc ſubtractionem alicuius quantitatis tertiæ, quæ pro diverſitate radicum neceſſario maior aut minor eſt, uti id conſtat ex geneſi poteſtatum. Poteſt itaque $(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}}$ repræſentari per $A - x + B$. & $(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ per $A - y + B$. ut nunc habeamus

$$(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}} = A - x + B = A - y + B = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}.$$

ſed hæc æqualitas non ſubſiſtit, niſi $x = y$. Et x non eſt æquale y, niſi exponentes radicum ſint eædem per modo dicta: Igitur ob æqualitatem inventam exponentes debent eſſe eædem: ſive a non poteſt eſſe niſi 2. Q. E. D.

Hypotheſes.

1. Facilitatis gratia ſupponantur in univerſa hac ſectione maſſæ mobilium æquales; niſi contrarium expreſſe dixero.

2. Supponatur motus æquabilis, donec diſerte moneam, me loqui de accelerato aut retardato.

Pro-

Propoſitiones.

Theorema I.

Vires vivæ puræ, quæ easdem maſſas movent, poſſunt menſurari per functionem aliquam celeritatis, quam producunt.

Demonſtratio.

Quoniam motus a viribus vivis puris procedens perſeverat in infinitum, ex Def. I. & Axiom. I. ideo quantitas illarum virium non poteſt æſtimari ſive ex ſpatio, ſive ex tempore abſolutis. Poteſt igitur ſolum ex maſſis, & ex relatione ſpatii ad ſpatium eodem tempore, vel temporis ad tempus pro eodem ſpatio; aliud enim nihil datur in hoc motu. Quia verò maſſas ſupponimus æquales per hyp. 1. Igitur in noſtris caſibus aut nulla eſt inæqualitas, & æſtimatio virium nulla; aut illa pendet ex relationibus memoratis. Eſt vero inæqualitas per ax. 2. ergo & æſtimatio eius, eademque petenda ex relationibus allegatis. Hæ autem comprehenduntur in idea celeritatis per definitionem celeritatis receptam. Igitur ex celeritate ſumi poteſt menſura: cumque per dicta aliud nihil accedat, ſumi poteſt ex functione aliqua celeritatis, quæ a viribus illis producitur. Q. E. D.

Coroll. 1. Conſequenter duæ pluresve vires vivæ puræ, ſeſe invicem non afficientes, vel ſeorſim conſideratæ, æſtimari poſſunt, & per ax. 3. debent, per functiones ſimiles celeritatum, quas producunt.

Coroll. 2. Etſi igitur vires puræ non obtineant effectus ita totales, ut iisdem abſorbeantur: poſſunt tamen invicem conferri & menſurari ex effectibus dato tempore productis; effectus enim illi pro diverſis celeritatibus ſunt diverſi.

Schol. Attendendum tamen eſt, cum dico, vires puras menſurari poſſe ex effectibus ſuis, & effectus variare pro celeritatibus variis: me non ideo ſtatim aſſerere, vires, effectus & celeritates eſſe proportionales. Multæ adhuc difficultates involvuntur menſuræ effectuum variorum, de quibus hoc loco dicere nihil attinet.

Theorema II.

Si duæ vires vivæ puræ eidem corpori A inexiſtentes ita agant, & ad producendum aliquem motum abſolutum concurrant, ut neutrius motus motum alterius in ſua directione & celeritate augeat vel minuat: tum actio compoſita ex actionibus virium illarum reſultans eſt æqualis aggregato actionum ſingularum.

Demonſtratio.

Actio compoſita aut æqualis eſt aggregato ſingularum, aut maior, aut minor. Non maior: quia neutra alteram auget, dum ita concurrunt, ut neutrius motus per motum alterius in ſua directione & celeritate promoveatur. Non minor: quia neutra alteram in concurſu ſuo impedit, aut motum eius imminuit. Igitur eſt æqualis. Q. E. D.

Coroll. Quoniam in viribus vivis puris actiones eodem tempore durantes ſunt uti vires, per Cor. 2. def. XI. Igitur & vis compoſita, ex duabus eiusmodi viribus reſultans, eſt æqualis aggregato ſingularum.

Schol. Duplex huius Theorematis applicatio eſſe poteſt, utraque legitima, ſed altera tantum in ſequentibus attendenda. Si maſſam corporis A concipias diviſam in duas partes, tum habebis duas vires vivas in eodem corpore, ſed ex illarum genere, quas def. 8. parallelas vel disiunctas vocavimus; atque eo in caſu per præſens theorema intelligitur, poſitis diverſorum corporum

cele-

celeritatibus iisdem vires eſſe ut maſſas. Sin eandem maſſam corporis A, atque adeo unumquodque eius punctum cenſeas urgeri duabus viribus, quarum tamen neutra alteram in exercitio ſuo impediat vel adiuvet, ſic, ut corpus non magis aut minus promoveatur in directione ſingularum, ſive illæ ſimul agant, ſive ſolæ agant: habebimus alterum huius propoſitionis caſum, qui reſpondet Def. 5. & theorematí ſeq.

Theorema III.

In omni parallelogrammo rectangulo actio & vis viva pura ſecundum diagonalem AD eſt æqualis aggregato actionum & virium vivarum purarum ſecundum latera AB, AC. *Fig. 2.*

Demonſtratio I.

Vires ſecundum latera AB & AC ad communem motum concurrentes ſic agunt ſingulæ, ut neutrius motus motum alterius in ſua directione & celeritate augeat vel imminuat: corpus enim A per concurſum illarum nec magis nec minus promovetur ſecundum directionem AB, quam ſi hæc vis ſola ageret; ſimiliterque ſecundum directionem AC. Earum igitur aggregatum eſt æquale vi compoſitæ reſultanti ex earum concurſu per Cor. Theor. 2. Sed vis hæc compoſita eſt vis ſecundum diagonalem per Coroll. def. 4. & Lemma I. Ergo in omni parallelogrammo rectangulo vis ſecundum diagonalem eſt æqualis aggregato virium ſecundum latera AB & AC. Idemque valet de actionibus; actiones enim hoc in caſu per Cor. 2. Def. XI. ſunt ut vires. Q.E.D.

Schol. Obſervetur, inter motus vere compoſitos (v. Schol. def. 8.) in ſolo rectangulo duas vires laterales ſic agere, ut neutra vis alterius motum in ſua directione

ctione augeat vel minuat. Si enim angulus ſit acutus, *Fig.* 3. & ad ſingulas directiones AB vel AC ducatur linea perpendicularis *ab*, *ac*; quo menſurari poſſit, quantum à vi utraque in ſingulis directionibus corpus A promoveatur: manifeſtum erit, illud motu in linea AD facto magis recedere a linea *ab* in directione AB, vel a linea *ac* in directione AC per motum utrumque coniunctum, quam per unum ſimplicem: Et vice verſa, ſi angulus fuerit obtuſus, illud minus promoveri in ſuis directionibus. Noſtra igitur demonſtratio ad ſolum pertinet caſum anguli directionum recti: id quod vel ideo ſtatim monendum duxi, ne quis hæc ad omnes motuum compoſitorum caſus ita transferre adgrediatur, ut putet, in parallelogrammis etiam obliquangulis vim ſecundum AD eſſe æqualem aggregato virium ſingularium ſecundū AB & AC. Recte Newtonus l. c. monuit, per motum ſecundum AC corpus A non accedere ad lineam BD. Recedit autem a linea *ba*, & accedit ad lineam D*d*. Itaque augetur motus in directione AB*d*. Excluditurque hic caſus a Theor. 2. una cum illis omnibus, ubi directio vis unius poteſt reſolvi in duas perpendiculares, quarum altera coincidit vel repugnat directioni vis alterius.

Demonſtratio 2.

Fig. 4. Sit corpus A elaſticum quieſcens, & in illud incurrat aliud corpus F priori æquale, elaſticum, & in directione FA cum celeritate ut FA latum: per receptas percuſſionum leges, poſt ictum corpus F quieſcet, & corpus A movebitur in directione & cum celeritate AD=FA. Vis igitur omnis corporis F tranſiit in corpus A, & vis, quam habet corpus A, eſt æqualis vi, quam habuit corpus F, ſibi æquale. Sint porro duo

cor-

corpora E & G prioribus æqualia ; quieſcat denuo A, & in idem incurrant eodem momento corpora E & G: Per easdem regulas quieſcent poſt ictum corpora E & G: & corpus A movebitur in directione ac celeritate AD=FA. Conſequenter utrumque corpus E & G amittet vim ſuam, quæ tranſibit utraque in corpus A. Vis autem, quam habebit corpus A, erit eadem, quæ ante fuerat. Cum igitur vis corporis F, & aggregatum virium in corporibus G & E æquentur vi eidem tertiæ, a corpore A acceptæ ; æquantur etiam inter ſe : Hoc eſt, in parall. rectangulo vis viva pura corporis F, ſecundum diagonalem moti, eſt æqualis aggregato virium, quibus duo corpora æqualia moventur in lateribus FE & FG. Q.E.D.

Schol. 2. Facile patet, hanc ſecundam demonſtrationem non poſſe transferri ad angulos obliquos; quoniam ibi differunt caſus percuſſionum, qui fiunt vel ab uno corpore, ſecundum diagonalem moto, vel a duobus, motis ſecundum latera, quando celeritates ubique lineis prædictis ſunt proportionales. Rationem diverſitatis horum caſuum ex ſuis fontibus eruemus in ſectione ſecunda; qua ſimul oſtendemus, neque a viribus mortuis, neque ab ipſo motu compoſito deſumi inſtantiam poſſe adverſus noſtram hanc inferendi rationem.

Theorema IV.

In motu actuali æquabili vires motrices non ſunt ut ſpatia, quæ eodem tempore deſcribuntur, neque adeo ut celeritates motuum.

Demonſtratio.

Vires Motrices in motu æquabili ſunt vires vivæ puræ, per Def. 1. Iam in parallelogrammo rectangulo aggregatum virium purarum ſecundum latera AB & AC eſt *Fig. 2.*

æquale vi ſecundum diagonalem AD per Theor. 3. Aggregatum laterum non eſt æquale diagonali. Ergo vires non ſunt ut latera & diagonalis. Spatia eodem tempore percurſa, & celeritates per Lemma 4. ſunt ut latera & diagonalis. Igitur vires vivæ non ſunt ut ſpatia eodem tempore percurſa, neque ut celeritates. Q. E. D.

Coroll. Humani igitur aliquid patiuntur, qui generaliter vires omnes motrices, atque adeo etiam vivas puras ex facto maſſæ in celeritatem æſtimant.

Theorema V.

In motu æquabili vires ſimplices ſunt ut quadrata ſpatiorum eodem tempore percurſorum; ſive ut quadrata celeritatum, quas producunt.

Demonſtr.

In parallelogrammo rectangulo diagonalis repræſentat ſpatium a vi ſecundum diagonalem, latera repræſentant ſpatia a viribus ſingulis ſecundum ſua latera eodem tempore percurſa, per Lemma 1. & ſpatia illa repræſentant celeritates per Lemma 4. Vires autem poſſunt menſurari ex functione celeritatis, per Theor. I. & vires complures ex functionibus ſimilibus, per Coroll. 1. Theor. I. Igitur vires ſecundum diagonalem, & latera poſſunt menſurari ex functionibus harum linearum. Debent autem in rectangulo ſic menſurari, ut aggregatum ſingularum lateralium ſit æquale tertiæ diagonali per Theor. III. Sed in rectangulo nullæ dantur functiones ſimiles huic conditioni ſatisfacientes, præter quadrata laterum, per Lemma 5. Igitur vires ſingulæ æſtimandæ ſunt per quadrata linearum, ſpatia & celeritates ſuas exprimentium: Hoc eſt, in motu æquabili vires ſimplices ſunt ut quadrata ſpatiorum &c. Q. E. D.

Coroll. Recte igitur æſtimationem antea receptam correxit Leibnitius, ſubſtituendo illi, pro menſura virium vivarum purarum, factum ex maſſa in quadratum celeritatis.

Schol. Velim attendatur, hoc loco penitus ceſſare exceptiones virorum celebrium adverſus argumentum Leibnitii allegatas, & *a diverſo tempore* motuum ſumtas: eſt enim ubique idem tempus; eſt etiam celeritas uniformis. Feci igitur, quod non ita pridem Illuſtris ſententiæ Leibnitianæ adverſarius poſtulavit; reduxi quæſtionem ad motus uniformes, hoc eſt, ipſius ſententia, ad debitos argumento huicce terminos, & ad identitatem temporis. Oſtendam vero inferius, quomodo vires in motibus etiam acceleratis æſtimentur ex præſentibus; & quibus caſibus ad temporum diverſitates attendi debeat, vel non debeat, indicabo in ſectione ſecunda.

Theorema VI.

In parallelogrammis non rectangulis vis ſecundum diagonalem non eſt æqualis aggregato virium ſecundum latera ſingularium.

Demonſtr.

Vires vivæ ſimplices menſurantur ex quadratis celeritatum ſuarum, per Theor. V. Celeritates ſunt ut lineæ reſpectivæ in parallelogrammo, ex Def. III. Aggregatum igitur virium ſecundum latera repræſentatur aggregato quadratorum ex lateribus $AB^2 + AC^2$; & vis ſecundum diagonalem repræſentatur quadrato diagonalis AD^2. Hoc aggregatum non eſt æquale quadrato diagonalis, niſi in rectangulo, per Elem. Geom. Ergo nec aggregatum virium ſecundum latera eſt æquale vi ſecundum diagonalem in parallelogrammis non rectangulis.

Coroll. Ergo neque vis ex duabus lateralibus, eidem corpori A inſitis, compoſita, hoc in caſu eſt æqualis earum aggregato. Vis enim compoſita eſt vis ſecundum diagonalem, per Coroll. Def. IV.

Theorema VII.

Vis compoſita ex duabus viribus lateralibus, quarum directiones angulum *acutum* faciunt, eſt æqualis ſummæ quadratorum ſpatiorum, quæ ſeorſim ab illis eodem tempore percurrerentur, una cum duplo facto ſpatii unius CD in lineam EC, interceptam inter punctum C & perpendicularem AE, ex angulo parallelogrammi acuto demiſſam.

Fig. 5.

Demonſtratio.

Vis ex lateralibus ſecundum AB & AC compoſita eſt vis ſecundum diagonalem AD per Coroll. def. IV. Vis ſecundum diagonalem $AD = AD^2$ per Theor. V. ſed ob angulum AED rectum, eſt $AD^2 = AE^2 + ED^2 = AE^2 + EC^2 + 2EC \times CD + CD^2 =$ (quia $AE^2 + EC^2 = AC^2$) $AC^2 + CD^2 + 2EC \times CD =$ quadrato ſpatii AC + quadrato ſpatii CD, una cum duplo facto ex CD in lineam EC. Q. E. D.

Coroll. 1. Patet, hunc caſum poſtliminio recidere in caſum theorematis tertii; ſi angulus fiat infinite parum acutus, ſive rectus; tunc enim EC fit $= 0$.

Coroll. 2. Patet etiam, ſi in corpore A ſupponatur ineſſe vis inſita ſecundum AB, & ſimul alia ſecundum AC, radium quemcunque quadrantis FCG; vim ex utraque compoſitam ſemper eſſe maiorem, quo angulus BAC eſt magis acutus; Erit enim linea EC ſemper maior, donec evaneſcente angulo fiat æqualis radio $AF = AC$.

Coroll.

Coroll. 3. Ex quo etiam hoc ſequitur, ſi corpori A iam in motu ſecundum AB poſito, nondum inſita concipiatur vis quoque altera, ſed illi demum debeat percuſſione corporis alterius externa ingenerari vis ſecundum AC radium quemcunque: quod vis externa percutiens, corpori iam moto directionem & celeritatem AC de novo ingeneratura, debeat eſſe maior, quando eſt angulus BAC acutior.

Theorema VIII.

Vis compoſita ex duabus viribus eidem corpori A iamiam inſitis, & directione ſua *coincidentibus*, eſt æqualis quadrato ſummæ ſpatiorum, quæ a ſingulis percurrerentur dato tempore, ſive quadrato ſummæ celeritatum, quas ſingulæ ſeorſim producerent. *Fig. 6.*

Demonſtratio.

Hoc varie demonſtrari poteſt. Maneamus in tramite hactenus calcato. In caſu theorematis VII. diagonalis AD, exprimens directionem & celeritatem motus compoſiti, ob angulum infinite acutum, fit æqualis $AB+BD$. Ergo & vis compoſita, hoc eſt, vis ſecundum diagonalem, quæ eſt $=DA^2$, fit $=(AB+BD)^2$.

Similiter, EC fit $=AC$, & AE fit $=0$. Adeoque formula illius Theorematis $AE^2+EC^2+2EC\times CD+CD^2$ tranſit in hanc $AC^2+2AC\times CD+CD^2$, $=(AC+CD)^2=(AC+AB)^2$. Q. E. D.

Coroll. 1. Idem valet de tribus, pluribusque in uno corpore coincidentibus, eſtque vis ex pluribus talibus compoſita æqualis quadrato ſummæ celeritatum, non ſummæ quadratorum celeritatum.

Coroll. 2. Adeoque vis compoſita ex coincidentibus non eſt aggregatum ex ſingulis ſimplicibus tantum:

 ſed

ſed æquatur aggregato huic una cum productis radicum ex ſingulis quadratarum in radices reliquarum bis ſumtis. Patet hoc ex dignitate ſecunda multinomiorum.

Cor. 3. Ergo ſumma productorum modo memoratorum facit differentiam inter vim compoſitam ex duabus eidem corpori inſitis, ſed directione indifferenti, aut coincidenti agentibus.

Cor. 4. Quodſi igitur vires ſimplices in eodem corpore coincidentes ſint ſeorſim æquales, vis ex illis compoſita proportionalis eſt quadrato numeri componentium. Ita vis A, compoſita ex tribus *a, a, a,* quarum celeritates ſint 1, 1, 1, habebit celeritatem, ut 3, & erit=9

Cor. 5. Patet quoque, ſi ex hac velocitate compoſita dematur velocitas ut 1. vim compoſitam ex omnibus non ſolum imminui vi ut 1, ſed ſimul auferri duplum factum ex hac ablata in omnes ſimplices adhuc remanentes.

Schol. 1. Non caret hæc propoſitio *paradoxi* ſpecie. Itaque varia hic notari debent. 1. Non poteſt illa evitari, niſi vel Leibnitiana virium æſtimatio negetur, vel recepta motuum compoſitio. Si enim ex duobus motibus conſentientibus vel coincidentibus fit motus in diagonali, & vis æſtimatur per quadratum celeritatis: erit utique vis compoſita proportionalis quadrato diagonalis. Hoc igitur in illorum gratiam, qui Leibnitio accedunt, dictum eſto. 2. Adverſariis commendo *verum* propoſitionis ſenſum; eo enim neglecto poſſent ex hoc theoremate abſurditatis arguere æſtimationem Leibnitii. Loquor de viribus eidem corpori *inſitis*; non de *imprimendis*. *Scio*, ſi ſimul impingant in corpus A duo corpora & *a* ſigillatim illi æqualia, & quorum ſingula ſeorſim

orſim ipſi imprimerent celeritatem AB, & AC, non ideo corpori A imprimi celeritatem ut AD, cum angulus BAC obliquus eſt. *Scio*, ſi corpus duplum ($=\alpha+a$) impingat cum celeritate ut AB, in corpus A quieſcens, non illi communicatum iri celeritatem $=2AB$; etſi a corpore α ſolo accepiſſet celeritatem AB, & a corpore *a* ſolo accepiſſet eandem. Non pertinent ad noſtrum inſtitutum hi caſus. *Dico* enim: Si eidem corpori A cenſeantur iamiam inſitæ duæ vires M & N, quarum alteræ corpus A transferrent dato tempore ex A in B, & alteræ ex A in C tempore eodem: Tum vis ex illis compoſita transferet corpus A tempore eodem ex A in D, & erit proportionalis quadrato lineæ AD. 3. Quæ ſit huius differentiæ cauſa prolixius dicam ſequenti ſectione. Hoc loco illud moneo: *vulgares* percuſſionum leges & conſiderationes hic non ſufficere. Si quæ autem percuſſio fuerit eiusmodi, ut in corpus motum agat tanquam in quieſcens, illius ope tales corpori vires inſeri poſſe. Exempla mox repetam e doctrina gravitatis. Sed ſublimius aliud, & nobili controverſiæ implicitum, alteri loco & tempori aſſervabo. 4. Denique, ſi minus tolerabile videatur ex duabus viribus coincidentibus exſurgere vim maiorem aggregato earundem: explicent mihi contrariæ ſententiæ patroni, cur in ipſarum hypotheſi per reſolutionem oriantur vires parentibus ſuis maiores. Si enim ex F moveatur corpus directione & celeritate FA, vis motrix erit $=F\times FA$: Sed poſtquam id in corpus A quieſcens & æquale impegit, movebitur A ſecundum AC cum celeritate AC, & F ſecundum AB cum celeritate AB: eruntque adeo vires motrices $=F\times AB+A\times AC$. Quale hoc *augmentum* eſt? & unde ortum? *Fig. 4.*

Schol.

Schol. 2. Illud fortaſſis non abs re erit, ut ſolutionem ſpecioſæ difficultatis hic interſeram; quoniam *aliquo ſenſu* ſumi ex hoc theoremate debet. Eſt vir genere & ſcientia illuſtris, cuius hæc obiectio publice legitur. „ *Sit*
Fig. 7. „ *corpus* C *ſphæricum, et gravitatis expers, libere natans in aere. Sint corpora duo* A *et* B *priori* „ *æqualia et ſimilia, eademque celeritatibus* AC=BC, *ſub* „ *directionibus æqualiter ad horizontem inclinatis irruant* „ *in corpus* C. *Reſolvantur directiones* AC *et* BC *in* „ *ſuas laterales, altera in* AD, *et* DC, *altera in* BD *et* „ DC. *Quoniam directiones horizontales* AD *et* BD *per* „ *hypothesin æquales ſunt, et contrariæ; illæ mutuo ſeſe* „ *deſtruunt: Reſtantque ſolæ verticales* DC *et* DC, *quæ* „ *in corpus* C *quieſcens agant. Urgebitur itaque corpus* „ C *verticaliter deorſum, cum ſumma directionum vel vi-* „ *rium verticalium reſiduarum. Sit angulus* ACB=120 „ *gradibus, erit* DC=$\frac{1}{2}$BC, *et corpus* C *urgebitur vi ver-* „ *ticali, quæ ſit æqualis vi totali et abſolutæ, quam ante* „ *ictum habuit corpus* A *vel* B, *adeoque dato tempore de-* „ *ſcribet lineam verticalem* EC=AC=BC: *habebitque* „ *celeritatem eandem, qua ferebantur corpora* A *et* B *an-* „ *te percuſſionem: atque, ſi in ipſo ictus momento, quar-* „ *tum corpus* E *ſingulis prioribus æquale verticaliter ſur-* „ *ſum impingat cum data celeritate* EC, *certum eſt, cor-* „ *pus* C *permanſurum in quiete, et futurum inter corpo-* „ *ra utrinque agentia æquilibrium. Sed æquilibrium non* „ *afforet, ſi vires æſtimandæ eſſent per quadrata veloci-* „ *tatum: Corpus enim* C *urgebatur duabus viribus verti-* „ *calibus, quarum ſingularum celeritates exprimuntur per* „ DC=$\frac{1}{2}$EC. *Adeoque vires per* DC^2=$\frac{1}{4}$EC^2; *unde* „ *earum integra ſumma tantum eſt*=$\frac{1}{2}$EC^2; *cum tamen*

„ *quar-*

quartum corpus E, *impingens in* C, *et idem reducens ad* ,, *æquilibrium*, *habeat celeritatem ut* EC, *et conſequenter* ,, *vires*, *ex Leibnitii ſententia æſtimatas* , *ut* EC^2. *Quo-* ,, *modo hæc conſentiunt?* ,, Eſt hic dignus vindice nodus: Dabimus operam, ut ſolvatur. Poteſt autem id fieri, ſi caſuum varietates legitime diſtinxeris. 1. Si omnia tria corpora, A, B, & E ſimul impingant in corpus medium C: erit *æquilibrium*, hoc ſenſu, ut corpus C permaneat in quiete, & nullius corporis motum ſequatur; *vires* autem, quibus illud ſurſum & deorſum urgetur, *non* ſunt *æquales*. Siquidem vis ſurſum agens eſt $= E \times EC^2$: & vis deorſum agens eſt $= (A + B) \times DC^2$. Notari autem meretur, ad quietem corporis inter duo impingentia medii nequaquam requiri virium æqualitatem; ſed oportere, ut *vires* ſint *reciprocæ maſſarum*. Id in ſecunda ſectione plenius apparebit. 2. Si conſideres, quid in experimento aliquo ſecuturum ſit ex impactu *duorum* tantum *corporum* A & B *in tertium* C quieſcens, & de elaſticis ſermonem inſtituas: equidem directiones horizontales AD & BD ita ſibi repugnabunt, ut corpus C de neutra participet; ſed directiones verticales DC & DC non ita tranſibunt in corpus C, ut hoc moveatur cum celeritate CE, etſi illud in eadem hac directione CE feratur poſt ictum. Neque adeo hoc corpus C, per ictum iſtum ſemel in motu poſitum, ad æquilibrium reducetur per occurrens aliud æquale E, motum in directione, & cum celeritate EC. Conſtat hoc per ordinarias de corporum percuſſione regulas: neque pugnat cum ſententia priori, ſi rem ſolicite reputes. 3. Sin denique abſtrahas a modo, quo corpori C impreſſæ ſint vires illæ ſecundum DC & DC, concipiasque, eidem corpori C *inſitas* eſſe *undecunque* vires M & N,

I agentes

agentes ſecundum latera parallelogrammi DC & DC, angulum infinite acutum comprehendentia; erit utique celeritas corporis C exprimenda per diagonalem $= 2DC$; & opponendum huic corpori, pro reſtituendo æquilibrio, aliud æquale E, cum celeritate & directione EC adveniens. Sed hoc in caſu vis corporis C non erit ſumma ſingularium $= 2DC^2 = \frac{1}{2}EC^2$; Sed addendum eſt huic ſummæ duplum factum ex DC in DC: ut adeo per theorema præſens, vis compoſita corporis C emergat $= C \times (DC + DC)^2 = E \times EC^2$; uti pro æquilibrio faciendo requiritur per regulam No. 1. huius ſcholii allegatam. 4. Similes hiſce reſponſiones pertinent ad illos quoque caſus, ſi loco trium eiusmodi corporum, æquales directionibus ſuis angulos comprehendentium, fingas: *quinque*, aut *ſeptem* &c. corpora impingere in aliquod

Fig. 8. medium C quieſcens: illud unum memineris, quod in hiſce caſibus attendi etiam ad theor. ſeq. 10. oporteat; eſt enim $C \times (2DC - 2HC)^2 = E \times EC^2$, pro No. 3. huius ſcholii: pro No. autem 1. erit, (colligendo A & F in corpus unum, itemque B & G in alterum) $A(DC - HC)^2 + B(DC - HC)^2 : E \times EC^2 = E : A + B$. Eſt enim $DC - HC = \frac{1}{2}EC$; ſive $2DC - 2HC = EC$: & generaliter pro omni figura regulari laterum numero imparium, uti *Goldbachius noſter* ex hoc ipſo theoremate deduxit, cum id Geometrice nonniſi difficilius demonſtrari poſſet, ducta diametro ad unum radiorum v. gr. EC perpendiculari, differentia omnium diſtantiarum ſuperiorum $Aa + Bb +$ &c. & omnium inferiorum $Ff + Gg +$ &c. eſt ſemper æqualis radio EC; id quod obiter indicatum pro novo exemplo eſſe poteſt inſtituti illius *Varignoniani*, quo uſus mechanicæ in geometria oſtenditur.

Theo.

Theorema IX.

Vis compoſita reſultans ex duabus viribus, quarum directiones angulum *obtuſum* comprehendunt, eſt æqualis ſummæ quadratorum ſpatiorum, quæ ſeorſim ab illis eodem tempore percurrerentur, demto duplo facto ſpatii unius CD in lineam CF interceptam a perpendiculari ex angulo obtuſo demiſſa, & puncto C. *Fig. 9.*

Demonſtratio.

Hæc eadem eſt cum Demonſtratione Theorematis VIII. niſi quod ibi prop. 12. Element. II. allegatur, hic autem prop. 13. Eſt enim $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2CD \times CF$; Adeoque & vis compoſita ex duabus &c. Q.E.D.

Coroll. 1. Patet igitur, ſi directiones angulum obtuſum comprehendant, vim compoſitam eſſe minorem aggregato ſingularum ſeorſim ſumtarum.

Coroll. 2. Eſſe æqualem ſummæ virium ſingularium, ſi CAB fiat infinite parum obtuſus, hoc eſt rectus; adeoque rem denuo recidere in Theor. III.

Coroll. 3. Eſſe minimam, ſi angulus fiat infinite obtuſus, hoc eſt,, ſi directiones fiant plane contrariæ; eo enim caſu CF fit maximum.

Theorema X.

Vis compoſita reſultans ex duabus, quarum directiones ſunt omnino contrariæ, eſt æqualis quadrato differentiæ ſpatiorum, quæ a ſingulis percurrerentur, ſive quadrato differentiæ celeritatum, quas ſingulæ producerent.

Demonſtratio.

Fiat angulus CAB infinite obtuſus, ut habeamus vires directione ſibi repugnantes: fiet CF=CA adeoque formula Theor. IX. $CA^2 - 2CD \times CF + DC^2$ erit = $CA^2 - 2CD \times AC + CD^2$. Eſt vero hæc formula = *Fig. 9.*

I 2 (CA—

$(CA-CD)^2$, vel $(CD-CA)^2$=quadrato differentæ laterum, quæ exponunt ſpatia & celeritates. Ergo vis ut AD^2, compoſita ex duabus, quarum directiones &c. Q. E. D.

Poteſt idem, uti hactenus, deduci ex vi ſimplici ſecundum Diagonalem. Diagonalis enim hoc in caſu eſt differentia laterum. Et vis compoſita eſt æqualis vi ſimplici ſecundum Diagonalem ex Def. IV. Ideoque per Theorem. V. vis hæc compoſita eſt æqualis quadrato differentiæ ſpatiorum vel celeritatum. Q. E. D.

Theorema XI.

Si vires duæ inſitæ, directionibus ſuis indifferentes, ipſæ exponantur per lineas AB & AC, tum directio & celeritas vis ex illis compoſitæ obtinentur, ſi in parabola quacunque ſemiordinata DO pertinens ad abſciſſam AD (=AB+AC) ſumatur pro ſinu toto, & ſemiordinatæ BN, CM, pertinentes ad abſciſſas AB & AC reſpective pro coſinibus BAD, CAD.

Fig. 10. *et* 11.

Demonſtratio.

Sit AMNO linea parabolica, parametro $m = 1$ deſcripta: Erit $DO=\sqrt{DA}$, & $BN=\sqrt{BA}$, denique $CM=\sqrt{CA}$. Fiat iam $Ab=BN$, & $Ac=CM$, & $Ad=DO$. Exprimꝫ Ab, Ac, Ad, celeritates virium per AB, AC, & AD expreſſarum, per Theor. V. eritque adeo $Abdc$ parallelogrammum, in quo latera & diagonalis repræſentant directiones & celeritates virium indifferentium ſecundum Ab & Ac, atque vis ex illis compoſitæ ſecundum Ad. Quodſi igitur actu ſumatur Ab & Ac, habebitur Ad poſitione. Si in gradibus quæratur, manifeſtum eſt, ſumta Ad pro ſinu toto, eſſe Ac ſinum rectum, & Ab ſinum complementi Anguli BAD,

&

& vice verſa, A*b* rectum, & A*c* ſinum complementi anguli CAD. Q.E. D.

Coroll. 1. Ex his patet, ſi latera, ſibi invicem perpendiculariter inſiſtentia, exprimant ipſas vires, & compleatur rectangulum ACEB, directionem vis compoſitæ nunquam fore in eius Diagonali, niſi cum rectangulum tranſit in quadratum.

Coroll. 2. In ceteris caſibus lineam AD, quæ directionem & quantitatem vis compoſitæ exponat, cadere verſus illud latus, quod minores exponit vires.

Coroll. 3. De aliis directionum componendarum angulis rem ſimiliter poſſe expediri.

Schol. Brevior conſtructio fuiſſet, ſi ad alterutram lineam, v. g. AC pro unitate aſſumtam, & ad alteram AB quæſiviſſes mediam proportionalem AF, & ex hac AF, atque unitate AC compleviſſes paral'elogrammum. Ita enim directiones & celeritates fuiſſent uti latera AC, AF, AG, quia vero ſic pro ſingulis caſibus nova aſſumeretur unitas; ideoque prætuli conſtructionem alteram univerſaliorem. Semel enim deſcripta omnibus inſervit caſibus parabola. Utilitatem huius theorematis ſuo oſtendam tempore. Nunc tranſeo ad motum *accelera-tum.*

Theorema XII.

Si quod corpus A ex altitudine AB ita cadat motu a quiete incoato in A, ut percurrendo ſpatium AC in tempore primo adquirat celeritatem CF, & percurrendo ſpatium CD in tempore ſecundo adquirat novam celeritatem LG = CF, habeatque adeo in D celeritates ſecundum eandem directionem duas æquales, ſcil. DL (=CF) & LG: iterumque percurrendo ſpatium DE præter priores DL+LG=BM+MN ad- *Fig.* 12.

quirat novam ſingulis prioribus æqualem NH, & ſic porro: Dico, vim corporis vivam, lapſu adquiſitam, eſſe ut quadratum celeritatis finalis.

Demonſtratio.

Supponatur, nova celeritatis incrementa ceſſare vel in C, vel D, vel E, vel B &c. Certum eſt, corpus deinceps motum iri æquabiliter deſcendendo; & vim eius adquiſitam fore maiorem in B, quam in E, & ſic porro; quoniam major illis caſibus eſt celeritas, & quantitas virium menſurari poteſt ex functionibus celeritatum ſimilibus per Theor. 1. & Cor. eius 1. Quæritur igitur ſolum, quanta ſit illa vis? Oſtendimus Theor. 5. in motu uniformi vim eſſe ut quadrata celeritatum. Hic motus eſt uniformis in ſuppoſitione ceſſantium incrementorum, & peragitur a vi per lapſum adquiſita. Ergo vis per lapſum adquiſita eſt ut quadratum celeritatis finalis.

Poteſt hoc, præmiſſo Theor. 5. omnino ſufficere ad monſtrandam rei veritatem: ut tamen intelligatur, quomodo hæc etiam cum cæteris cohæreant, placet attendere ad Theorema 8. Vis lapſu a quiete incoato ſic adquiritur, ut corpori A, cadendo per AC imprimatur vis celeritatis CF in directione verticali; eidemque cadenti per CD imprimatur vis celeritatis LG, & cadenti per DE vis celeritatis NH in directione priori. Habemus igitur tres vires inſitas coincidentes, quarum ſingularum celeritates ſunt $CF = LG = NH$: adeoque per Theor. 8. vis ex illis tribus compoſita eſt æqualis $(CF + LG + NH)^2 = EH^2$, ſive uti quadratum celeritatis finalis. Q. E. D.

Coroll. Quoniam in hypotheſi theorematis præſentis per Galilæanas demonſtrationes altitudines lapſus ſunt,

ut

ut quadrata celeritatum finalium, per altitudinem illam inde a quiete cadendo adquiſitarum: igitur manifeſtum eſt, rectiſſime celeb. viros, Leibnitium, Hermannum & Wolfium, menſuram virium vivarum feciſſe altitudinem, per quam grave cadens a quiete in hypotheſi gravitatis naturalis Galilæana adquireret celeritatem datæ æqualem; itemque, per quam aſcendendo conſumeret celeritatem initialem datæ æqualem.

Schol. Habemus hoc loco *factum naturæ*, quod caſum exhibet Theorematis noſtri VIII: Etſi illud fortaſſis prima fronte ſatis a conſuetudine naturæ alienum videri potuiſſet. Uſus autem illius Theorematis ſpectari amplius in hoc negotio poteſt; ſiquidem facilis hic via aperitur ſolvendi difficultatem Leibnitio motam. Suſpicatur enim Vir Clariſſimus, pugnare ſecum duas Leibnitii ſententias, dum altera gravitatem requirat uniformem, altera reſpuat: æqualibus enim temporibus æquales imprimi celeritates, gravitatem igitur eſſe uniformem, & agere æqualiter; nec tamen æquales imprimi vires, gravitatem igitur non eſſe uniformem, nec agere æqualiter. Accipe verba, quæ huc pertinent: „ *Supponatur tempus, quod cadendo inſumi-* „ *tur, dividi in partes æquales. Quia gravitas uniformis* „ *eſt, et conſequenter æqualibus temporis partibus æquali-* „ *ter agit; neceſſum eſt, ut actione ſua imprimat, et com-* „ *municet corpori cadenti vires, celeritates et motus æqua-* „ *les temporibus æqualibus. Adeoque vis impulſiva, cele-* „ *ritas, et motus corporis cadentis augebuntur pro ratio-* „ *ne temporis.---Gravitas ponderis 4 librarum tantun-* „ *dem agit uno tempore, ac gravitas ponderis* 1. *libræ* „ *quatuor temporibus --- Dominus Leibnitius agnoſcit,* „ *quod*

„ *quod gravitas temporibus æqualibus producat celeritates* „ *æquales in corpore deſcendente*, *quodque tollat æquales* „ *in aſcendente*; *atque adeo ſit uniformis. Agnoſcit eſſe* „ *uniformem*, (*cum agitur de imprimenda celeritate*; „ *et facit tamen non uniformem*) × *cum agitur de im-* „ *primenda vi impulſiva. Non igitur ſecum ipſe con-* „ *venit.* „ Hactenus vir doctiſſimus. Solutionem difficultatis peto ex præmiſſis Theorematis 12 & 8. Singulis ſcil. temporibus imprimitur *nova celeritas* priori æqualis; idque ob uniformitatem gravitatis, & quoniam illa in corpus motum agit tanquam in quieſcens. Dicam ſimiliter, ſingulis temporibus imprimitur *nova vis viva*, quæ, ſi ſola eſſet in hoc corpore ſine priori iam inexiſtente, vel ſi in alio corpore conciperetur, eſſet eidem æqualis, ob eandem rationem; etſi enim iam moveatur corpus, reſpectu tamen cauſſæ gravificæ poteſt conſiderari ut quieſcens. Perinde igitur eſt, reſpectu novarum cauſſæ gravificæ impreſſionum, an concipias illam ſecundo momento agere in corpus prius iam aliqua vi affectum; an ſupponas, poſt primum momentum annihilari illud, & ſubſtitui in eius locum aliud quieſcens æquale. Utroque enim caſu gravitas tantundem aget in momento ſecundo. *Quoad actionem* igitur gravitatis ipſam *nulla* hic difformitas fingitur. Differentia omnis *eſt in effectu* compoſito. *Celeritas* enim ex duabus ſingulatim æqualibus compoſita facit ſummam; adeoque reſpondet temporum ſummæ: Sed *vis viva*, *compoſita* ex duabus in eodem corpore coincidentibus, quarum ſecunda prioris celeritatem ſua celeritate addita duplam facit, *vis* inquam, hæc non facit ſummam duarum virium ſingularium per Theor. 8. adeoque non reſpondet tempori, ſed quadra-

× Hanc parentheſin ego addidi, ut compleatur ſenſus, credo omiſſam eſſe incuria Typothetae, ob repetitionem vocis *uniformem*.

dratis temporum vel celeritatum , ſive ſpatiis deſcenſus per Theor. 12. Nihil hic pugnat. Gravitas eſt uniformis in producenda celeritate nova, & vi nova: diſcrimen celeritatis compoſitæ a vi compoſita aliunde pendet, quam a diverſa æqualibus temporibus gravitatis actione. Iſta de motibus acceleratis. Nunc de *retardatis* breviter.

Theorema XIII.

In motibus uniformiter retardatis vis initialis compoſita ex pluribus ſimplicibus coincidentibus per actionem gravitatis eodem modo reſolvitur, quo compoſita eſt in acceleratis.

Demonſtr.

Supponatur, corpus celeritate iam adquiſita in B *fig.*12. iterum ſurſum reflecti, & aſcendere: ſupponatur, illud primo tempuſculo aſcendere per B*b*: & ſupponatur ſpatiolum B*b* tam parvum, ut motus per illud faciendus poſſit haberi pro æquabili. Certum eſt, illud corpus experturum reſiſtentias gravitatis, quales & quantas cadendo ex *b* in B acciperet impulſus: adeoque id perinde eſſe, ac ſi vi, cuius celeritas eſt BR, directe reniteretur vis, cuius celeritas eſt R*r*. Vis igitur viva, quam corpus habet in *b* eſt æqualis quadrato differentiæ celeritatum $= bk^2$ per Theor. 10. Cumque in motibus uniformiter acceleratis vel retardatis poſt ſpatia finita eædem obtineant rationes, quæ in ſpatiolis infinite parvis, vis reſidua in E ſimiliter æqualis erit vi, quæ emergit ex duabus ſibi repugnantibus, quarum altera eſt vis in B, cuius celeritas eſt BR, & alterius celeritas eſt QR. Sed vis ex hiſce compoſita eſt $=(BR-QR)^2=BQ^2$. Adeoque vis poſt primum tempus finitum reſidua eſt

 EH^2.

$EH^2 = BQ^2$. Et ſic porro. Igitur in motibus uniformiter retardatis &c. Q. E. D.

Idem breviter ex Cor. 6. Theorem. 8. ſequitur: Tollatur enim ſingulis temporibus vis, cuius celeritas ut 1; vis compoſita non minuetur tantum vi ut 1, ſed ſimul duplo facto ex vi ablata in vires reſiduas: Sunt adeo decrementa virium vivarum in retardatis, uti incrementa in acceleratis, inverſo ſolum ordine initii, & finis per Theor. 12. Reſolvitur adeoque vis compoſita in retardatis, eodem modo, uti componitur in acceleratis. Q. E. D.

Coroll. Ex hiſce conſequitur, corpus, vi concepta ſurſum pergens, aſcendere præciſe ad altitudinem, ex qua cadendo adquiſiviſſet celeritatem impreſſam; & tempore eodem, quo illam cadendo accepiſſet: & in ſingulis ſpatii punctis, itemque in ſingulis temporis momentis, æqualiter ab initio caſus, & a fine aſcenſus diſtantibus, habere celeritates easdem: & in deſcriptis temporum momentis verſari in iisdem ſpatii punctis, & habere vires vivas æquales: & in fine aſcenſus, quemadmodum & in principio deſcenſus, nullam habere vim vivam: hoc eſt, noſtram virium theoriam conſentire in omnibus cum recepta gravitatis.

Schol. Velim, attendant lectores mei ad diſcrimen *virium vivarum* per actionem gravitatis acceptarum, vel deſtructarum, & *gravitatis* ipſius. Neglecto illo Vir inſignis ex æſtimatione virium Leibnitiana voluit deducere, ab initio temporis nullam eſſe gravitatem, adeoque corpus plane non deſcendere; & in fine aſcenſus ſimiliter nullam eſſe, adeoque corpus poſt aſcenſum non recidere in tellurem; ſed manere ſuſpenſum. Enimvero recte

pro-

probat, quod, ſi *vis lapſu adquiſita* ſit ut ſpatium, illa ab initio lapſus nulla ſit. Sed ad noſtram id ſententiam non pertinet, quando eam concluſionem *ad gravitatem* transfert in applicatione. Gravitas enim, vis illa mortua ſolicitans, non eſt ut ſpatium deſcenſus: Sed vis viva, per actionem gravitatis infinito numero replicatam orta, eſt ut ſpatium. Per hanc non incipit deſcendere corpus: ſed pergit tamen, per hanc non minus, quam per novas gravitatis ſolicitationes. Similiterque, quamdiu illa durat in aſcenſu, tam diu corpus aſcendit: cum deſinit, non aſcendit amplius. Hæreret igitur ſuſpenſum, ſi nihil aliud accederet. Sed vis eadem mortua, quæ priorem vim vivam in hoc corpore ſucceſſive peremit, nunc etiam continuatis impulſibus novam, & priori illi directione ſua contrariam ſucceſſive imprimit. Manent igitur etiam hac in parte ſententiæ noſtræ in concordia cum Theoria Gravitatis Galileana, ſi a Carteſio diſceſſeris, univerſaliter approbata. vid. *Recueil. des diverſes Pieces par Mrs.* Leibniz, Clarke, Newton. *T.* 1. *p.* 178.

Sectio Secunda,

ſive,

DE VIRIBUS CORPORI MOTO INSITIS

Variæ Dilucidationes.

I.

PRæmiſſis, quæ dixi, auſim ſperare, Lectorum aliquos non procul ab aſſenſu ſententiæ noſtræ abſore. Si hæreant alii: varias id dubium cauſſas habere poteſt. Quas divinare licuit, conabor ex eorundem animis revellere. I. Simillima eſt evidentiæ *ſpecies* illa *veri*, qua blanditur æſtimatio mechanicorum recepta: Neque poteſt illi melius detrahi perſona, quam ſi integram idearum huic negotio involutarum texere genealogiam liceat. Incipiam igitur ab hoc inſtituto. §. 2.—20. II. Qui ratiocinium ſuperiori ſectione expoſitum generatim potius intuentur, quam exacte penſitant, illis facile videri poteſt, pati hunc inferendi modum *inſtantias*, a vi mortua vel motu ſumtas. Itaque ſecundo loco ſingula ratiocinii momenta ſcrupuloſius repetam, &, quid noſtra ab inſtantiis memoratis illatio differat, oſtendam. §. 21.-34. III. Theorema octavum Leibnitianæ æſtimationis conſectarium eſt primo



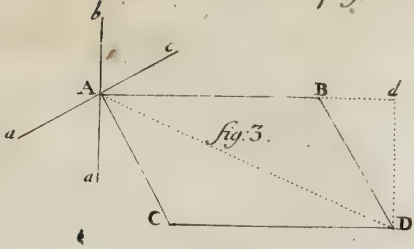


fig:3.

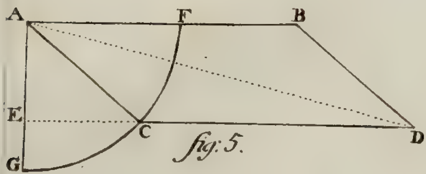


fig: 5.

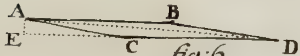


fig:6

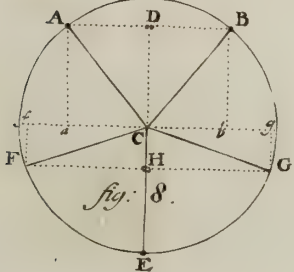


fig: 8.

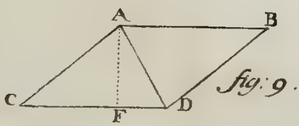


fig: 9.

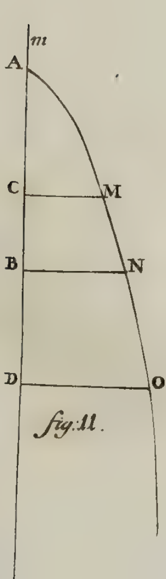


fig:11.

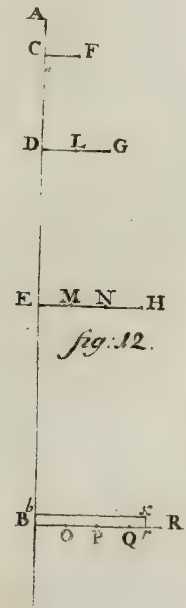
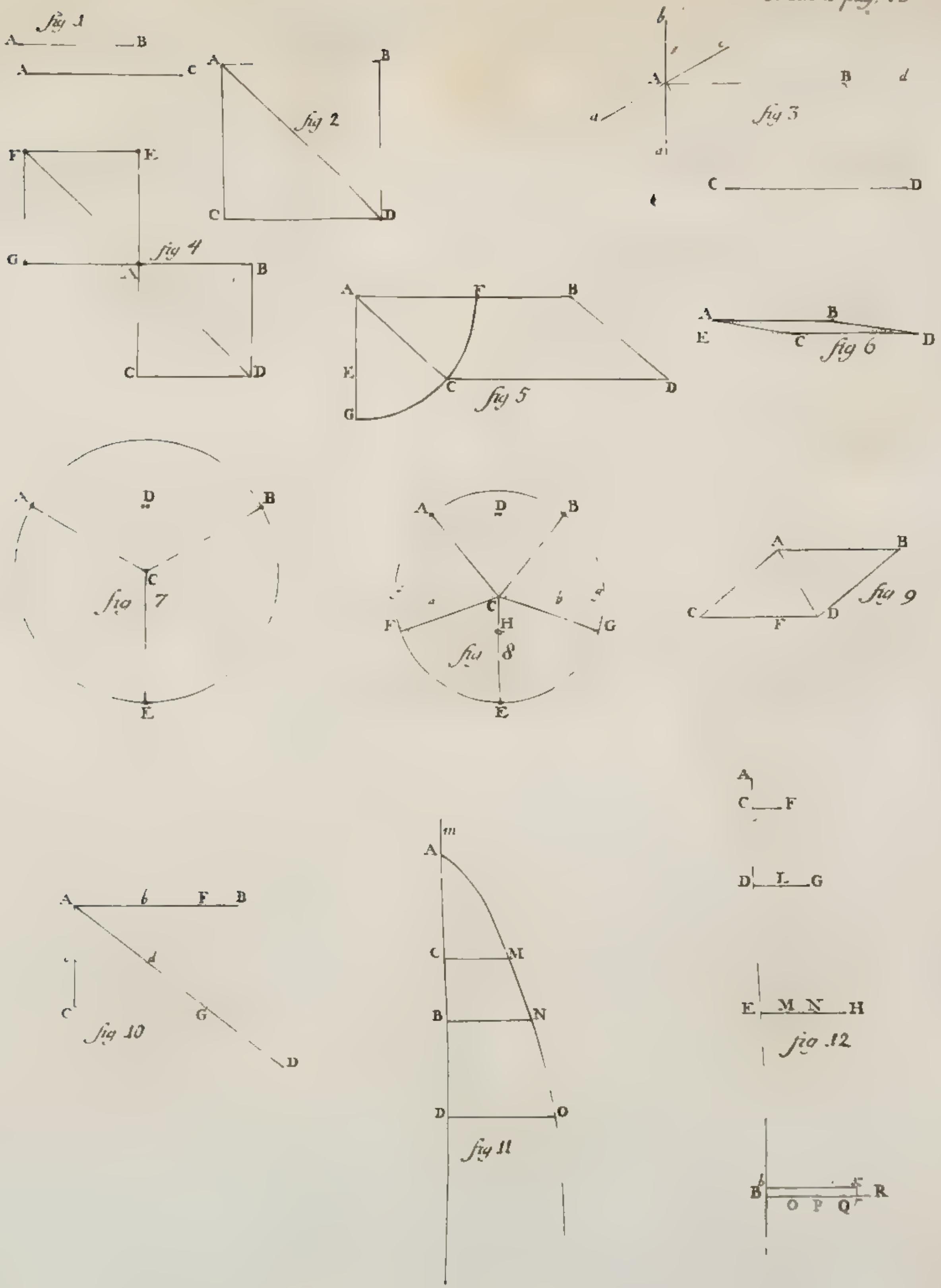


fig:12.

Comm. Acad. Sc. Tab 2 pag. 76



mo intuitu *paradoxum*: id igitur alienare animos legentium poſſet, niſi tertio loco exponeretur, quæ ſit illius propoſitionis cum receptis de percuſſione ſententiis cohæſio & conſenſus §. 35—50 IV. Porro, quo plures ſunt ad eandem concluſionem *aditus diverſi*, eo gratior ad illam acceſſus eſt; igitur quarto novum tentare fontem, & ex ipſa percuſſionum doctrina menſuram ſtabilire eandem placebit §. 51—61. Denique *V. difficultatem* ex eodem hoc percuſſionum argumento deductam neceſſe erit reſolvere. §. 62—67. Prolixior erit omnis hæc diſquiſitio, ne, *dum brevis eſſe laboro, obſcurus fiam.*

Membrum. I.

II. Vires motrices varie a variis menſurari conſtat inter eruditos. *Carteſius*, magnus menſurarum artifex, iudicari illas voluit ex maſſa in ſpatium elevationis. Teſtes ſunt literæ eius. vid. Tom. I. Epiſt. 73. Idem contradixit menſuræ virium per maſſam ductam in celeritatem. v. Tom. I. Epiſt. 74. p. 255. Edit. Bat. Tom. II. Epiſt 92. p. 293. & Epiſt. 109. p. 369. & paſſim alibi. *Succeſſores* eius, quoniam ad Staticam attendebant ſolam, ubi celeritates ſpatiis reſpondent, utramque æſtimationem admiſerunt. v. *Nic. Poiſſon.* in Mechan. Carteſ. not. 1. p. 23. Equidem proprie loquendo nec in ſtaticis vires ſunt proportionales facto maſſæ in celeritatem: ſed momentum virium. Ita vis corporis gravis eſt maſſæ proportionalis: ſed momentum eius eſt proportionale facto ex maſſa in celeritatem. Receptum tamen eſt vulgari uſu, ut momentum potentiæ nitentis in-

telligatur, cum vires mortuæ dicuntur eſſe proportionales facto maſſæ in celeritatem. Neque ex hac amphibolia periculum eſt inter gnaros rerum & ingenuos iudices. Manſit etiam hæc virium æſtimatio ad usque *Leibnitium*, qui introducto *virium* novo *diſcrimine*, de altera illarum ſpecie conceſſit receptam, de altera novam propoſuit menſuram. Fingamus, nos priorum omnium oblitos, de novo inquirere in fontes & argumenta utriusque æſtimationis.

III. *Originem* quidem *æſtimationis* illius, qua vires exprimuntur *per factum maſſæ in celeritatem*, quæro in hac facili idea. Fac, eſſe duo corpora A & *a*, alterum maius, alterum minus, ſitque v. g. A=2*a*; fac illa moveri celeritate æquali per tempus & ſpatium æqualia: Maior vis eſt, quæ movet corpus A, quam, quæ movet corpus alterum *a*; tantoque eſt maior, quanto eſt corpus ipſum maius; poteſt enim corpus A concipi diviſum in duo *a*+*a*, quæ ſingula arguant vires æquales; æqualia enim in hoc motu ſunt omnia. Igitur poſitis celeritatibus æqualibus, vires motrices ſunt ut maſſæ. *Similiter*, ſi duo corpora æqualia ſupponantur moveri uniformiter per tempora æqualia, ſic tamen, ut unum A percurrat ſpatium duplum, vel utcunque multiplum alterius *a*, habeatque adeo A celeritatem duplam, vel utcunque multiplam alterius *a*: Maior vis erit in primo quam in ſecundo. Cumque ſpatium corporis A poſſit dividi etiam in duas vel utcunque plures partes, quarum ſingulæ ſint æquales ſpatio corporis *a*: Manifeſtum etiam hoc loco videtur, vim corporis A, eſſe ad vim corporis *a*, uti ſunt ſpatia*, ſive, quod in motibus æquabilibus (de quibus loquimur) idem eſt, ut celeritates. Ex

*.vid Cart. Tom. I. Ep. 73 par. *quod facile*; et in primis Ep. 74. paragr. *primum illud*

eo

eo itaque ſequitur, ſi corpora A & *a* habeant maſſas inæquales, & celeritates quoque inæquales, quod vires in illis motrices ſint in ratione compoſita ex directis masſarum & celeritatum.

IV. Equidem hæc adeo evidentia viſa ſunt multis, ut vel *axiomatis* vel *definitionis* loco hanc propoſitionem adhibuerint. Allegarem nomina virorum, niſi res nota eſſet. Puto autem, ipſam hanc evidentiæ ſpeciem, coniunctam cum experimentis quibusdam eidem accommodis, in cauſſa fuiſſe, ut tam ſero, & a paucis hucusque agnita ſit fallacia huic ratiocinio intertexta. Conſuevimus, non inſignem axiomatis attentionem adhibere: itaque fieri poteſt, ut fallamur blandiente veritatis ſpecie; maxime, ſi opinionem noſtram videatur experientia confirmare. Atqui certum eſt, in vecte & potentiis ad vectem reduci ſolitis æquilibrium obtineri, quando factum ex pondere vel (poſita gravitate naturali) ex maſſa corporis in ſpatium vel celeritatem utrinque eſt æquale. Habemus igitur experientiam propoſitioni conſentientem: habemus in illa fontem quoque illius Carteſiani axiomatis, quo aſſeruit, eandem requiri vim ad elevandum corpus duplum ad altitudinem ſimplam, vel ſimplum ad duplam. Equidem hoc in ſtaticis, quando vecte aut ſimilibus utimur machinis, veriſſimum eſt.

V. *Duplici* tamen *methodo* inquiri in eius propoſitionis univerſalitatem, atque adeo detegi potuiſſet latens in enunciatione nimium generali vitium; altera a poſteriori, a priori altera. Neſcio, quam primo loco viam ingreſſus ſit *Leibnitius*, calcavit utramque; & in publicis quidem ſcriptis illa a poſteriori primum uſus eſt. Oſtendit ex hoc principio nimium generaliter adhibito

ſequi,

ſequi, quæ parum inter ſe conſentiant. Ex dictis *Carteſii* 1) æquales ſunt vires, quæ unam libram elevant ad ſpatium quadruplum, & quæ libras quatuor elevant ad ſimplum: 2) Suntque etiam vires ex Carteſianorum ſententia ut factum ex maſſa in celeritatem. Iam ſuppone corpus A ut 1. deſcendere gravitate naturali, & incipiendo a quiete, ex altitudine 4. ulnarum, & corpus B ut 4. deſcendere ſimiliter ex altitudine ulnæ unius: Vis in fine deſcenſus utrinque adquiſita erit, ibi quidem tanta, ut ſimplum pondus poſſit elevare per quadruplum ſpatium, hic tanta, ut quadruplum pondus per ſimplum ſpatium. Ergo per hypotheſin primam erunt hæ vires æquales. Sed per ſecundam erunt inæquales; eſt enim maſſa corporis A=1, & celeritas in fine adquiſita per Galilæanas demonſtrationes=2: adeoque factum ex maſſa A in ſuam celeritatem=2. Sed maſſa corporis B eſt =4, & celeritas eius adquiſita =1: adeoque factum ex maſſa B in celeritatem ſuam =4. Quod ſi igitur vires æſtimantur ex hypotheſi ſecunda, deprehenduntur eſſe inæquales. Vnde *Repugnantia*?

VI. Facile eſt intellectu, quod *aut* ex propoſitione nimium generali hypotheſeos primæ enaſcatur, *aut* ex falſa virium æſtimatione in hypotheſi ſecunda. In *primo* quæſiverunt reſponſa ſua, qui Carteſium defendere inſtituerunt, Viri celebres & eruditi; ſic tamen, ut in applicationem Leibnitii potius, quam in enunciationem nimis generalem reiiceretur culpa. Voluerunt intelligi Carteſium de illo caſu, ubi *tempora* aſcenſuum ſunt *æqualia*; addito, quod in caſu per Leibnitium obiecto tempora aſcenſuum ſint inæqualia. Et fatendum eſt ſane, differre caſum Leibnitianum ab enunciatione Car-

Carteſiana, ſi ad identitatem temporis hæc ipſa reſtringatur. Quæri igitur primo loco & *hiſtorice* poſſet, an ex ſententia Carteſii principium illud generale de ſolis illis valeat caſibus, ubi elevationes ad diverſas altitudines ſunt iſochronæ? Equidem in exemplis a Carteſio allegatis id ita obtinere certum eſt; videturque id conſequi etiam ex eo, quod in tertia ratione dubitandi idem Carteſius expoſuit. Tom. 1. Ep. 74. p. m. 258. Ex adverſo autem non minus certum eſt, illum temporis, in utroque caſu eiusdem, nec verbo meminiſſe; quin imo repugnaſſe illi comparationi, qua factum ex maſſa in ſpatium æquipolleat facto ex maſſa in celeritatem, id quod tamen evitari non poteſt, ſi identitatem temporis requiſivit. conf. Tom I. epiſt. 74. p. m 255. 256. Secundo etiam *philoſophice* diſquiri poteſt, an omnino temporis determinatio neceſſaria ſit ad huius quæſtionis definitionem? Negat Leibnitius, diverſitatem temporis, quo gravium aſcenſus §. 5. memoratus durat, in æſtimatione harum virium attendendam eſſe: Aiunt alii. Sed *quo iure*? Dicam id, ubi enunciationem Carteſianam una cum ſua limitatione examinabo. Hic *primus* controverſiæ actus fuit.

VII. Quando ſemel illi involutus fuit *Leibnitius*, ſucceſſive deinceps ea vulgavit, quæ *a priori* perducere poſſunt ad agnoſcendam explicationis aut demonſtrationis §. 3. exhibitæ inſufficientiam. Ponamus, eſſe Philoſophum, qui exemplis didicerit, ſæpe evidens videri, quod diſtinctius examinatum omnino falſum eſſe deprehenditur; eundemque adeo demonſtrationem optare & aggredi propoſitionis antea exhibitæ. Num hæc ratiocinationum ſeries eſſe poteſt? Quæro menſuram virium

 motri-

motricium : hoc eſt, quæro, quam rationem habeant vires in corpore moto A præſentes, ad vires in corpore moto B præſentes. Si menſuram quæro, debeo invenire *unitatem*, quæ *replicetur* in uno, & in altero: Replicetur autem ita, ut quicquid in ſimplo deprehenditur, bis deprehendatur in duplo vid. Act. Er. 1695. p. 155 Non igitur ſufficit pro menſura ſtatim, quicquid creſcente menſurando creſcit; ſed neceſſum eſt, ut, ſi menſurandum debeat creſcere ad duplum ſui, etiam menſura ſic creverit, ut habeatur præciſe duplum eius, quod eſt in ſimplo. Hæ igitur *regulæ* eſſe debent examinis & demonſtrationis.

VIII. Applicando illas ad *negotium præſens*, facile videmus, cum maſſa corporis A dupla eſt corporis a, & velocitas utrobique $=1$. quod in corpore A omnia perfecte replicentur, quæ ſunt in corpore a, habeo enim corpus unum $=a$, cum celeritate ut 1, & corpus alterum $=a$, cum celeritate ut 1; ſiquidem ex hypotheſi $A=2a$. Habeo bis in corpore A, quicquid habeo in a: celeritatem ut 1. habeo bis; maſſam ut 1. habeo bis. Quoad hanc igitur partem nihil deſiderari poteſt in ratiocinatione §. 3. Iam porro ſint duo corpora A & a, quorum maſſæ ſint æquales, ſed ſpatia motu æquabili percurſa ſint inæqualia, & quidem ſpatium corporis A duplum alterius, ſive $S=2s$ & $C=2c$, quæritur, an denuo ſint omnia replicata? Celeritas C eſt dupla alterius c. Sed eadem eſt utrobique maſſa. Idem corpus cum celeritate dupla latum non replicat exacte id, quod eſt in eodem corpore cum celeritate ſimpla lato. Si, miſſa celeritatis idea, attendas ad ſpatium, habes hic motum per du-

duplex ſpatium eodem tempore; ibi motum per ſimplex; ſed motum tamen eiusdem corporis. Igitur non omnia tam liquido & exacte replicantur, ut in priori menſura obtigerat.

IX. *Quid inde* concludi poteſt? An minores ſunt vires, quam hic ſuppoſuit vel Carteſius, vel alii? quoniam ſcilicet non omnia exacte replicantur. An maiores ſunt ob diverſum agendi modum? Neutrum hactenus conſequi video. *Hoc infero*: quoniam nondum video, omnia perfecte replicari; igitur ex hiſce comparationibus nondum ſufficienter elucet menſuræ virium allegatæ veritas. Inquiri igitur tum in illius veritatem, tum &, ſi forte falſa ſit, in alterius ſubſtituendæ quantitatem de novo & ſolicite debet.

X. Circa veritatem menſuræ propoſitæ primum hoc occurit ſine dubio, ut examinetur *ad exempla* motuum & virium aliunde nota. Hic verum deprehenditur in potentiis ordinariis, quod factum ex maſſa vel pondere in celeritatem eius, ſi quæ oriatur, exprimat quantitatem preſſionis, ſive ut alii loquuntur, vim & quantitatem motus. Non licet tamen adquieſcere huic exemplo. Novimus, aliquando ex accidenti in uno caſu fieri, quod in altero ſecus obtinet. Quid igitur? *vel a priori* examinandum eſt, an ratio huius menſuræ in hiſce caſibus obviæ ex ipſa motuum natura univerſaliter ſcaturiat, *vel a poſteriori* perpendenda ſunt exempla etiam alia, & talia, quæ ad vectem & ſimilia reduci non poſſunt; ex illis enim, quæ eodem reduci poſſunt, non plus concludi poteſt, quam ex ipſo vecte. Facilius hoc eſſe videtur, ſi noris, quales ſint eiusmodi motus? ſunt autem motus ex gravitate, ex elaſtris, ex percuſſione orti & ſimiles.

XI. Examinemus motum *ex gravitate* ortum. Quanta eſt vis deſcenſu gravis cadentis adquiſita? an reſpondet facto ex maſſa in celeritatem? & ex maſſa in ſpatium, quæ ſalvo Carteſii diſſenſu hactenus habita ſunt pro ſynonymis? Diſſident *hoc in caſu* factum ex maſſa in ſpatium, & factum ex maſſa in celeritatem. vid. §. 5. Ergo ſi hæc facta utraque ad menſuram virium lapſu adquiſitarum transferre vellemus, falleremur in alterutro, vel utroque. Quid conſilii in re ambigua? quando menſura eadem examini ſubiecta, mox veritati conſentit (§. 10.) mox diſſentit §. 5: Inquirendum puto, an *eiusdem generis* ſint vires in *utroque* caſu? & quæ in illis menſura locum habeat, ſi ſint eiusdem vel diverſi generis?

XII. Iam vero facile intelligitur, *in potentiis mechanicis* non tam motum eſſe, cuius vis ex facto illo menſuratur, quam niſum ſolum; vires igitur nitentes potius, quam impetu concepto moventes. Sed *in caſu gravium* cadentium §. 11. eſſe vires actualiter & concepto impetu moventes. Ibi illas conſiderari, ut disiunctas a motu actuali, hic autem ut coniunctas. Opus hic eſt nomine aliquo. Placuit *Leibnitio* molitores imitari, & priores vocare *mortuas*, poſteriores *vivas*. His præmiſſis ſeorſim examinavit vires mortuas, & deprehendit illarum impetum ſeu momentum ſemper eſſe ut factum maſſæ in celeritatem: atque in hac æſtimatione conſentiunt paſſim auctores mechanici; oſtendemusque §. 60. quæ huius menſuræ connexio ſit cum æſtimatione virium vivarum veriore. Re enim omni perpenſa, deprehendimus, menſura mortuarum poſita, ſequi noſtram vivarum menſuram, & vice converſa. Intelligitur itaque, recte auctores calculum poſuiſſe de viribus mortuis. De

vivis

vivis quæſtio ſupereſt, an ſimiliter illæ æſtimari debeant? itemque, an vis a gravitate genita reſpondeat ſpatio vel celeritati? §. 5 & 11.

XIII. Sequor filum imaginationis meæ, &, ſi minus hiſtoriam refero, fabulam tamen philoſophicam condo non inutilem. Quæritur, an vis lapſu adquiſita ſit ut maſſa ducta in ſpatium, quod corpus illius ope poteſt aſcendendo contra niſus gravitationis deſcribere? an ſolum ſit ut maſſa in celeritatem, quacum incipit aſcendere? Comparantur hic duæ vires *ſecundum effectus ſuos*, ſcilicet vis corporis A ut 1 aſcendentis per ſpatium ut 4, & vis corporis B ut 4 aſcendentis per ſpatium ut 1: ſimiliterque comparantur vis corporis A ut 1 aſcendentis cum celeritate initiali ut 2, & vis corporis B ut 4 aſcendentis cum celeritate initiali ut 1. An effectus hic ſunt æquales? &, ſi effectus æquales ſunt, an ideo vires etiam ſunt æquales? Ambigua optio eſt. Audiamus partem utramque!

XIV. Videntur *effectus* eſſe *æquales*. Videturque id Carteſius enunciatione ſua generali agnoſcere; habemus enim hoc loco corpus quadruplum elevandum ad altitudinem ſimplam, & ſimplum ad quadruplam. vid. loc. Epiſt. cit. Videtur idem ſequi ex rei natura: corpori enim ſimplo per quatuor ſpatia aſſurgenti, ſuperandæ ſunt totidem gravitatis ſolicitationes, quot in uno ſpatio experitur corpus quadruplum; ſiquidem in omnibus ſpatii punctis gravitationes experitur maſſis proportionales. Præterea videntur etiam *vires* eſſe *æquales* effectibus, quos producendo conſumuntur: ſi enim vires maiores ſunt, quomodo conſumuntur producendo illos effectus? ſi minores ſunt, quomodo poſſunt illos produ-

 cere?

cere? Erunt igitur vires ut ſpatia illa in maſſas ducta. Hæc ſententia eſt *Leibnitii*; &, quoniam ſpatia, aſcendendo percurſa, ſunt uti quadrata celeritatum, erunt vires illæ uti maſſæ ductæ in quadrata celeritatum. Differet igitur æſtimatio virium vivarum, & mortuarum ex hiſce calculis.

XV. Si *alterius* partis argumenta audias: ita illi rationes ſubducunt ſuas. Videntur *effectus non* eſſe *æquales*. Corpus enim ſimplum per quatuor ſpatia aſcendens duplex inſumit tempus quoque, & corpus quadruplum aſcendendo per ſpatium ſimplex impendit tempus tantum ſimplum. Non igitur utrinque eadem ratio eſt; neque ex ſpatio ſimpliciter ſumi menſura virium poteſt in hoc caſu. Valet axioma Carteſii §. IV. allegatum, quando idem ad aſcenſum tempus inſumitur, cumque aſcenſus eſt uniformis. Quodſi igitur huc applicari debeat, convenit, ut reducatur caſus *retardationis* ad motum *uniformem*. Atque tum videamus, quæ menſura prodeat? Notum eſt, ſi corpus retineat in aſcenſu celeritatem initialem, illud aſcenſurum per duplex ſpatium. Aſcendet igitur corpus A ſimplum, celeritate ſua dupla, ad ſpatium 2.4=8. Et corpus B quadruplum celeritate ſua ſimpla ad ſpatium 2. 1=2. Sed aſcendet illud uniformiter per duo temporis minuta, donec ſpatium ſit=8 & hoc per unum ſolum. Igitur primo temporis minuto illud aſcendet per ſpatium =4. & hoc per ſpatium=2. Erunt igitur ſpatia(=4:2)uti celeritates(=2:1).Effectus igitur harum virium vivarum, & conſequenter ex Leibnitiano aſſumto vires, ſunt ut factum ex maſſa in celeritatem. Non igitur differt æſtimatio virium vivarum & mortuarum, ſi recte inſtituantur calculi. conf. de hac comparatione *Hiſtor. Acad. Scient. Pariſ.* ad A. 1721.

XVI.

XVI. Sunt hæc profecto plauſibilia utrinque: ſed an ſimul vera eſſe poſſunt? In talibus caſibus ſoleo opem *ex diſtinctionibus* repetere, & *unicuique parti aliquid* tribuere: neque enim fieri ſolet, ut tota via aberrent viri ſolertes, mutuo ſibi adverſantes. Alteri fere ex una parte, alteri verum aſſequuntur ex alia. Quid gitur? Annon diverſi ſunt caſus §. 14. & 15? Negat Leibnitius, habendam eſſe rationem temporis in hoc argumento; Aiunt alii. Latet hic amphiboliæ aliquid, evolvetur autem, ſi ſingulorum dicta preſſius examines. Monent, qui Leibnitianas tuentur partes, ſe de illis loqui viribus, quæ, dum effectus ſuos producunt, per reſiſtentias ſibi oppoſitas ſucceſſive conſumuntur: has enim vires eſſe reſiſtentiis illis proportionales, ſive magnum, ſive parvum temporis intervallum ſit, quo illum ſuum effectum præſtant. Quod ſemel conſumtum eſt, proportionale eſt reſiſtentiis, quæ ad effectum producendum ſuperari debuerunt, ſive alterum ſimul conſumatur, ſive non conſumatur, ſive citius conſumatur, ſive tardius. Recte igitur Leibnitium potuiſſe negligere reſpectum temporis ad producendum effectum requiſiti, *eo in caſu*, quo vires motum producentes per reſiſtentias contrarias conſumuntur: hoc eſt in motibus a gravitate retardatis. Quæ hic lectorum ſententia eſt? *Mihi*, verum fatear, etſi effectuum æſtimatio ſuis ſæpe difficultatibus non careat, videtur tamen, ſiquis illos dextre noverit diſcernere, & pro ſuis ſingulos claſſibus metiri; nihil hic Leibnitium peccaſſe.

XVII. *Neque* tamen *hæc ſola* extricandi ſeſe ex difficultate temporis via eſt. Primum, quod ſe mihi obtulit, cum exceptiones de diverſo tempore expenderem, hoc

hoc fuit, facile fieri poſſe, ut deſcenſus & aſcenſus illorum corporum A & B fiant temporibus iisdem, ſi ſupponas motum fieri vel in cycloidibus, vel in chordis ſaltim arcuum circuli eiusdem, quarum altitudines habeant ſe ad invicem ut 1 : 4. Demonſtratum enim eſt, aſcenſus & deſcenſus illos eſſe iſochronos. Poſtea vero intellexi, & Leibnitium ſimilia privatim admonuiſſe amicos atque adverſarios ſuos; vidique ex intervallo, *Hermannum* noſtrum in diſſert. Acad. *de legibus naturæ* inſcripta etiam ulterius progreſſum eſſe, & §. 7. admonuiſſe, quod facillime curari poſſit, ut minor altitudo maiori tempore abſolvatur, quam maior, atque tempora aſcenſuum ſint in ratione quacunque data inæqualitatis. Unde colligo, vel ex hiſce caſibus potuiſſe Viros eruditos intelligere, quod temporis idea in hoc motuum a gravitate naturali retardatorum negotio ſit aliena.

XVIII. Sed vero, cum motus retardati convertuntur in æquabiles, res plane aliter ſe habet. Innitebantur priora huic theſi, quod vires, quæ producendo effectum a reſiſtentiis ſibi oppoſitis conſumuntur, ſint ut effectus illi totales, ſive uti translationes maſſæ per ſpatium aſcenſus eæ, quibus plane impenditur, quicquid in corpore eſt virium. Si motum ſubſtituas uniformem, vires illum producentes non amplius concipi poſſunt, ut inter productionem effectus ſui per reſiſtentias contrarias abſorbendæ. Adeoque ceſſat applicatio æſtimationis virium ex effectu totali; neque hic indifferens eſt amplius, an in metiendis ex ſpatio viribus ratio habeatur temporis, an ſecus? Maiores ſunt vires motum æquabilem producentes, ſi minori tempore idem ſpatium abſolvunt per axioma 2. Sed vero cum vires concipio

uni-

uniformes, motumque adeo æquabilem producentes: eo ipſo nullus earum effectus totalis amplius allegari poteſt; vires enim, quæ tales producunt motus, numquam conſumuntur, ex Axiom. 1. quando enim conſumi vires effectum producendo debent, neceſſum eſt, ut adſint reſiſtentiæ quædam, tanquam ad hoc corpus impediendum applicatæ, atque illarum ut huic corpori oppoſitarum ſumma attendatur. Sed in motibus æquabilibus & uniformibus a reſiſtentia omni animum abſtrahimus noſtrum.

XIX. Quid hinc colligitur? An dantur *duplicis* generis vires vivæ? alteræ, quæ, dum effectum ſuum producunt, a reſiſtentiis illi oppoſitis conſumuntur? alteræ, quæ non conſumuntur? Si nomina vultis: primas Leibnitius *mixtas* vocavit, ſecundas vero *puras*. conf. def. 1. Pertinent igitur ad vires mixtas omnes illæ demonſtrationes, quæ ex effectibus totalibus, vel reſiſtentiis potius vires conſumentibus repetitæ ſunt, atque de illis immediate intelligi debent, quæ inde a §. 14. diximus pro Leibnitio: De puris autem hactenus eadem menſura per conſequentiam ſolum afferta eſt: non enim alia eſt vis cadendo per altitudinem definitam adquiſita, ſi deinceps eadem conſumatur iterum aſcendendo, vel, ſi ſupponatur perſeverare in vacuo, ſemper uniformis. Puto igitur, legitime viros doctiſſimos eviciſſe cauſſam ſuam, transferendo ad puras, quæ probaverant de mixtis. Si quis tamen hæreat, illi noſtræ de viribus puris demonſtrationes poterunt inſervire.

XX. Audivi, Leibnitium *aliis* etiam a *priori* argumentis inſtructum fuiſſe, quibus ex ideis virium & actionis, & effectuum generalibus menſuram obtinuerit eandem. Non eſt vero præſentis inſtituti de illis inquirere.

Neque enim hiſtoriam ſcribo univerſi de viribus vivis argumenti: Alioquin & reliqua virorum magnorum argumenta, præcipue autem illud eiusdem Leibnitii de conſequente ex veteri æſtimatione abſurdo, *motu* ſcil. *perpetuo* pure mechanico, hic evolvenda eſſent. *Genealogiam* dedi idearum quarundam, quæ mihi viſæ ſunt nos manu quaſi ducere poſſe *ad diſtinctiones* in hoc negotio obvias, *et* ad *rationes menſurarum* Leibnitianarum. Præmiſſis iſtis, tranſeo nunc ad eam partem, quæ propius ad *meam* concludendi rationem, dictorumque dilucidationem accedit.

Membrum II.

XXI. Conſtat ex §. 18. in motibus uniformibus habendam eſſe temporis rationem, ſi ex ſpatio æſtimari vires debeant motrices: Quæritur vero, an ea de cauſſa dici poſſit, poſito tempore eodem, vires eſſe ut maſſas in ſpatia ductas? Id vero ex hactenus dictis nondum definire licet. Admiſimus, vires eſſe proportionales reſiſtentiis, quibus ſuperandis ipſæ impenduntur atque conſumuntur: Sed in motu æquabili abſtrahimus a reſiſtentiis, neque vires motum illum producentes conſumi iudicamus. Ex immediata igitur ad motus uniformes attentione per ſuperiora nihil *adhuc* inferri poteſt. Poteſt autem, ſi illorum complures caſus dextre invicem conferas, eorundemque mutuas relationes animadvertas.

XXII. Accidit mihi, cum ad indagandos metaphyſice primos legum naturæ fontes animum adverterem, eidemque fini aliquos *Theodicææ Leibnitianæ* paragraphos meditarer, ut ſeſe aliud agenti argu-

men-

mentum offerret pro Leibnitiana virium menſura, deſumtum a motibus compoſitis uniformibus. ,,*Ex motu*,, (inquit Leibnitius l. c. §. 347.) *in duobus lateribus trian-*,, *guli componitur motus in diagonali: non vero exinde ſequi-*,, *tur, globum in hypotenuſa motum producere effectum*,, *duorum globorum ſibi æqualium, et in lateribus motorum.*,, *Atque id tamen obtinet in rerum natura*,,. Quoniam communiter effectus aſſumuntur viribus ſuis proportionales; ideoque *facile erat inferre*, quod in caſu per Leibnitium memorato, ubi effectus diverſarum virium ſunt æquales, etiam vires debeant eſſe æquales. Sed vires motum diagonalem præſtantes non poſſunt eſſe æquales viribus, quæ motus exhibent laterales: niſi ſingulæ æſtimentur per quadrata illarum linearum, quæ motus, ſpatia, celeritates virium ſuarum exponant. Obtinemus igitur æſtimationem virium vivarum & purarum, de quibus hic agitur, eam, quæ conſentiat Leibnitianæ. Sic primo intuitu iudicavi; atque id monui in *notula*, pag. 173. ſcripti mei ſuperius in *præfatione* allegati.

XXIII. Poſt maturius examen deprehendo, non fallere hanc concluſionem: Ratiocinium vero, niſi evolveretur, nimium *præceps* ire. 1. Non licet ab omni effectu ad vires tranſire proportione ſimili: æquipollent aliquando vires, quæ non ſunt æquales. 2. Aliquando motus laterales componuntur in motum diagonalem, ſed effectus unius globi diagonaliter moti non eſt idem, qui duorum æqualium in lateribus motorum. 3. Niſus a viribus mortuis pendentes non aliter componuntur, quam motus a vivis profecti: neque tamen vires mortuæ & vivæ habent menſuras easdem. 4. In parallelogrammis obliquangulis dubitari poteſt, an vis compoſita reſpondeat

quadrato diagonii, an quadratis laterum ſimul ſumtis? 5. Quæri etiam legitime poteſt, quomodo hæc æſtimatio conſentiat cum Theoria percuſſionis ordinaria; & ſic porro. Itaque *cautius* hic agendum erat. Accipe, quid fecerim?

XXIV. Primo vim ipſam argumenti, §. 22. obiter enarrati, *plenius* ita propoſui animo meo. Sit in globo A vis M, quæ ſola illum promoveret ex A in B
Fig. 1. dato tempore; ſit in eodem illo globo vis N, quæ ſola illum deferret ex A in C eodem tempore; urgeatur globus a vi utraque ſimul:Promovebitur ille in linea AD ex A in D eodem tempore,per communia. Motus igitur abſolutus globi A idem erit, ſi a duplici vi M & N ſimul urgeatur, ac ſi a vi ſimplici O urgeretur, quæ globum dato tempore deferret ex A in D. *Præterea*, ſupponatur in D globus D quieſcens; atque in illum directe impingens alius æqualis veniens ex A in D: Movebitur globus D per $Da = AD$, & A quieſcet. Si duos globos æquales B & C ſupponas ſimul impingere in D directionibus angulum rectum comprehendentibus, & celeritatibus BD, CD: quieſcent etiam hi, & globus D movebitur directione, & celeritate Da. Effectus igitur percuſſionis idem eſt in utroque caſu. *Denique*, ſit in D globus quieſcens, atque in illum oblique impingat globus A directione & celeritate AD veniens, poſt ictum movebitur D celeritate & directione $Db = BD$, A vero celeritate & directione $Dc = CD$. vid. *Mariotte* Traité de la percuſſ. P. I. prop. 3. p. m. 213. Hactenus omnia ſunt utrinque eadem, usque adeo, ut unus caſus poſſit experimento ipſo transmutari in alterum: *Annon* igitur *& vires*, utroque caſu agentes, ſunt inter

ſe

ſe *æquales*; duæ ſcil. laterales M & N vi compoſitæ diagonali O?

XXV. Fateor, me illico exiſtimaſſe, ſi poſt impulſum obliquum corporis A in corpus D, duo illa corpora moveantur in lateribus Dc & Db: per ictum illum vires neque auctas eſſe, neque minutas. Tantundem igitur virium fuiſſe antea in corpore A ſolo, atque nunc ſit in utroque; atque vires ante & poſt ictum hic eſſe æquales. Similiterque cum unus globus A celeritate AD latus imprimat corpori D celeritatem eandem Da, quam illi imprimunt duo globi C & B celeritatibus CD, & BD lati; atque hi omnes poſt ictum reducantur ad quietem: vires globi A eſſe æquales ſummæ virium in globis C & B. His autem æquationibus ſemel poſitis, obtineri æſtimationem quæſitam. Vim enim per AD non eſſe æqualem viribus per Dc & Db, vel viribus per CD & DB, niſi illa ſit $= AD^2$, & hæ $Dc^2 + Db^2 = CD^2 + BD^2$. Ita igitur brevis denuo opera fuit. Nolui vero talibus annotationibus confidere contra adverſarium, ſi quis obtingeret, difficiliorem. Itaque rem ulterius ſic evolvi. Habemus in eodem corpore A duas vires M & N, quæ concurrentes idem præſtant, quod vis una O: *Aequipollent* igitur huic tertiæ; ſed an ideo ſunt illi quoque æquales? Monent ſcriptores mechanici, differre hæc duo, & ſubinde etiam ſeparari. v. *Iac. Hermanni* Phoron. §. 36.

XXVI. Hic igitur neceſſum fuit, inquirere fontem diſcriminis illius, eundemque ad caſum applicare præſentem. *Datur*, inquio, *æquipollentia virium, ubi non adeſt earundem æqualitas.* Patet hoc ex conſideratione vectis in diverſa diſtantia diverſis ſolicitati viribus:

Patet ex compoſitione niſuum, ubi vires mortuæ lateraliter trahentes nunquam ſunt æquales tertiæ diagonali, niſi cum duæ laterales coincidunt directionibus ſuis in unam: Patet machinarum omnium exemplis. Itaque æquilibrium vel æquipollentia non infert æqualitatem virium. Recte iſta quidem: ſed *adiungo*, æquilibrium vel æquipollentiam inferre æqualitatem quoque, ſi minus virium, tamen actionum. vid. def. XI. Sect. 1. *Non poſſunt vires æquipollere, niſi actio virium ex una parte æquetur actioni ex altera.* Si minores fuerint vires, poſſunt applicari favorabilius, ut actio illarum maior emergat: itaque poſſunt æquipollere, quæ non ſunt æquales. Sed, ſi actio ſit ex alterutra parte minor, nihil eſt, quod defectum ſupplere, & redigere utrumque latus ad æquipollentiam poſſit. Quid inde conficitur; Nimirum hoc, ſi ex æquipollentia §. 25. oſtenſa colligere æqualitatem inſtituimus, *ad actiones* harum *virium* proprie attendendum eſſe.

XXVII. *Duplex* autem hic *reſpectus* denuo involvitur: ſemel inquirendum eſt, quomodo ſeſe *vires* puræ ſingulæ habeant *ad ſuas actiones*; deinde, quomodo ſe *vires* in motu compoſito *concurrentes* in actione ſua habeant *ad ſe invicem.* Quoniam vires vivæ puræ ſimplices corpori alicui ita inſitæ concipiuntur, ut unaquæque eius particula æque velociter ab illis urgeatur, & promoveatur uniformiter: itaque poſitis maſſis æqualibus nulla in applicatione virium harum diverſitas eſſe poteſt, niſi ad diverſitatem temporis attendere velis; iudicari itaque actiones harum virium debent ex intenſitate ipſarum, & tempore. vid. Corol. 1. def. XI. Ex eo ſequitur, ſi plures inter ſeſe conferantur vires puræ ſimplices,

plices, per idem temporis intervallum agentes, actiones eſſe inter ſeſe, ut vires. Adeoque in caſu motuum compoſitorum, quo tempora ſemper æqualia ſpectantur, niſi *ex ipſa compoſitione* aliquid novi diſcriminis accedat, *vires* vivas puras ſibi invicem *æquipollentes eſſe* etiam *æquales*.

XXVIII. Poteſt autem aliqua *diſcriminis ratio* oriri ex ipſa motuum compoſitione, *ob virium concurſum*. Cum igitur, quæ ex Coroll. I. Def. XI. modo repetiimus, pertineant ad vires ut ſingulas & ſimplices: quæro, quid obtineat *in compoſitis*? Si duæ vires M & N ſint in eodem corpore, videndum eſt, quomodo agant illæ? ſi enim ita agant ſingulæ in concurſu illo, ut neutrius effectus ab actione alterius ſive augeatur ſive minuatur; utque adeo motus a diverſis illis viribus pendentes in nulla re vel conſentiant ſibi vel repugnent: conſiderari illæ poſſunt, ut vires ſimplices, adeoque ex ante dictis iudicari debent. Sin effectus unius vis M augeatur vel minuatur per concurſum vis alterius N, attendi etiam illa diverſitas debet in iudicanda actione compoſita.

XXIX. *Applicemus cautelam*. Cum in plano ABC, vis M nititur & impellit corpus A in directione & celeritate AB, vis N directione & celeritate AC, & hæ duæ lineæ AB & AC comprehendunt angulum *rectum*: tum directio & niſus vis unius nulla ratione vel coincidit vel repugnat directioni & niſui vis alterius. Omni igitur reſpectu perinde eſt, quoad motum ſecundum directionem AB, an una cum vi M ſimul agat vis N, an omnino hæc abſit ex corpore A. Poſſunt igitur utræque hæ vires, etſi ſimul præſentes, conſiderari tamen *ut ſimplices* *Fig.* I.

ces

ces , neque in vim ex utrisque compoſitam aliquod ſive augmentum infertur, ſive decrementum ex concurſu actionis utriusque in corpore eodem. Agunt ſcil. in idem corpus duæ vires, ſed neutrius actio afficit, auget, vel minuit actionem, & effectum alterius quocunque reſpectu. Secus obtinet in caſibus angulorum recto maiorum vel minorum; de quibus deinceps.

XXX. Ex hiſce autem dictis hauriri omnia poſſunt, quæ ad nervum argumenti §. 24. 25. incoati pertinent. Accipe *ſeriem illationis*. In negotio motus compoſiti æquipollent duæ vires laterales vi tertiæ ſecundum diagonalem; per communia. Sed, ubi eſt æquipollentia virium, ibi eſt æqualitas actionum, §. 26. Iam æqualitas actionum in caſu anguli BAC recti infert æqualitatem virium; (namque in hoc caſu vires laterales agunt uti ſimplices §. 29. & actiones virium ſimplicium, poſito tempore eodem, ſunt uti vires ipſæ per §. 27.) *A*deſt igitur in caſu anguli directionum recti cum æquipollentia virium, æqualitas actionum; & cum æqualitate actionum æqualitas virium. Igitur vires laterales ſimul ſumtæ ſunt æquales vi ſecundum diagonalem. Igitur ſingulæ æſtimari debent per quadrata laterum & diagonii, quæ ſola faciunt æquationem quæſitam, per Lem. 4. Sect. 1. Igitur hæ vires ſunt ut quadrata celeritatum. Q. E. D.

XXXI. Non opus fuiſſet hac nova illationis, ſectione *prima* propoſitæ, repetitione: niſi ad *refellendas* pertineret *inſtantias*. Diximus in Schol. 2. Theor 3. nos hoc loco oſtenſuros diverſitatem argumenti noſtri, & inſtantiæ, quam a viribus mortuis, vel & ipſo motu compoſito obvertere quis poſſet. Si ſolum imitari velis §. 22. poſſes *de vi mortua* ſic arguere : Datis tribus poten-

potentiis, ſive viribus mortuis, quarum & intenſitates & directiones, conſequenter & celeritates exponantur per latera & diagonalem parallelogrammi cuiuscunque, vires laterales æquipollent vi ſecundum diagonalem. Id vulgo conſtat, & iam a *Stevino* uſurpatur pro eximio ſtatices principio. Sed in caſu anguli recti directio potentiæ unius non magis impedit directionem potentiæ alterius, quam in viribus vivis factum eſt: Ergo & hic potentia reſultans compoſita debet eſſe aggregatum potentiarum lateralium. Id vero eſt contra hypotheſin: igitur in argumento vitium eſt. Argumentum eſt ſimile alteri de viribus vivis: igitur & in illo vitium erit. Similiter *de motu* dixeris: Neque enim motus compoſitus eſt aggregatum ſingularium; etſi de illo valeant omnia, quæ de viribus dicta ſunt vivis.

XXXII. Detrahamus inſtantiis hiſce *larvam ſimilitudinis*. Si quis imitari ratiocinium geſtiat noſtrum, imitetur *ſeriem* §i. 30. *totam* neceſſe eſt: alioquin metus erit, ne fallatur in generalibus. Æquipollentia eſt potentiarum in caſu mox memorato §. 31. & æquipollentia infert æqualitatem: Fateor id, ſed addo, æqualitatem actionum, per §. 26. Igitur in caſu obiectionis datur æqualitas actionum. Concedo: Atque id ita eſſe, oſtendo ex ſuperioribus. Actio vis mortuæ æſtimatur ex facto intenſitatis in viam: Hoc factum exponitur per quadratum lineæ; ſiquidem una eademque linea intenſitatem exponit potentiæ, & viam, ſive celeritatem §. 31. Iam in angulo recto, aggregatum quadratorum lateralium eſt æquale quadrato diagonii. Igitur omnia ſe bene habent circa *actiones* virium mortuarum; neque peccabit inſtantia, ſi hic ſubſiſtet.

XXXIII. Sed vitium eſt *in progreſſu.* Cum de vivis agitur viribus, pergo ego: In motibus iſochronis actiones ſunt, uti vires, per §. 27; igitur cum æqualitate actionum adeſt virium æqualitas. Hoc imitari de vi mortua non licet. Non eſt in motibus iſochronis actio potentiæ, uti ipſa potentiæ intenſitas; ſed eſt uti intenſitas ducta in celeritatem. Non igitur de mortuis concludi per ſimilitudinem poteſt, quod de vivis dictum fuerat. Etſi igitur *anguli rectitudo* faciat, ut neutrius potentiæ momentum ſive actio vel augeatur vel minuatur per actionem alterius: non facit tamen, ut potentiæ intenſitas ſit actioni eius proportionalis. *Non* itaque *idem* utroque in caſu *angulus* eſt, qui efficit, ut aggregatum virium lateralium ſit æquale vi ſecundum diagonalem. In vivis *rectum* id efficere vidimus: In mortuis requiri angulum *infinite acutum*, patet ex relatione actionis vel momenti potentiæ ad ipſius intenſitatem.

XXXIV. De *motibus ipſis* dici varia poſſent. Conſiderantur vero motus corporis ſecundum AB, & AC
Fig. 1. faciendi, vel ut in hiſce lineis, vel ut in plano. Si conſideratur motus ſecundum AB *ut in linea* AB faciendus: impeditur utique per motum ſecundum AC, quando angulus BAC rectus eſt. Neque obtineri hoc ſenſu ſumma motuum lateralium poteſt, niſi eo in caſu, quo neuter alterum, ut in linea faciendum, impedit: Hoc eſt, cum angulus directionum infinite acutus latera præſtat coincidentia. Sin motus ſecundum AB & AC concipiantur, *ut in plano* ABDCA: id utique verum eſt, quod, ſumto angulo BAC recto, neuter motus alterum in ſua directione adiuvet vel impediat: v. Schol. 1. Theor. 3. Sect. I. Igitur etiam in motu compoſito ſecundum AD

debet

debet adeſſe aggregatum motus utriusque ſecundum AB & AC. Sed eo in caſu motus ſecundum AD debet cenſeri *duarum dimenſionum*, non unius. vid. def. 2. Sect. I. Non igitur neceſſe eſt, ut linea AD ſit æqualis aggregato linearum AB & AC: Sed ut directio compoſita AD ſatisfaciat utrique directioni ſimplici AB & AC: ſine alterutrius vel augmento vel detrimento. Verum iſta de inſtantiis!

Membrum III.

XXXV. Tertium huius diſſertationis officium eſt, exponere, quid de caſibus *directionum* angulos *non-rectos* comprehendentium exiſtimari oporteat. *Motus* ex duobus lateralibus *componitur* in motum ſecundum diagonalem, etiamſi angulus ſit v. gr. acutus: Quæritur, *an vires quoque*? & quo ſenſu illæ? Si in eodem corpore A ſimul inexiſtant vis M ſecundum AB agens, & ſeorſim ſumta (per §. 22. ſeqq.)$=AB^2$, & vis N ſecundum AC agens, & ſeorſim ſumta$=AC^2$; quæritur: an ex utraque ſimul ſumta aggregetur vis tertia O, ſecundum AD agens; &$=AB^2+AC^2=AE^2$? an vero ex illarum in uno corpore A concurſu emergat vis nova P ſecundum AD agens, &$=AD^2$? *Fig.* 2.

XXXVI. Videtur *primum*, quoniam intelligi non facile poteſt, unde ſit augmentum vis compoſitæ AD^2 ſupra aggregatum utriusque vis concurrentis, AB^2+AC^2. Itaque, cum idem corpus A a duplici vi M & N ſimul urgeatur directionibus AB & AC, directio quidem compoſita erit in diagonali, ſed diagonalis non exponet motum, & celeritatem corporis, neque quadra-

tum eius vim compoſitam. Videtur vero & *ſecundum*: quia enim ex motu per AB & AC componitur motus per AD celeritate AD : itaque etiam ex viribus, quæ motus illos per AB & AC producunt, componitur vis ſecundum $AD = AD^2$. Vires autem, quæ motus illos producunt, ſunt vires M & N eidem corpori A inſitæ. Itaque ex viribus M & N concurrentibus enaſcitur vis $P = AD^2$. *Vtrum recte?*

XXXVII. Quicquid hic difficile eſt, ſolvitur ex eo, ſi diſcrimen attendas, quod intercedit inter hoſce *duos* caſus, quando duæ vires ſunt *in eodem corpore inſitæ*, aut quando demum ſunt *imprimendæ ab aliis*. Conſtat ex receptis percuſſionum legibus, ſi, poſito angulo BAC acuto, idem corpus A ſimul percutiatur a duobus corporibus G & H ſibi æqualibus, & in directionibus GA, HA, ſive AC & AB incurrentibus, quorum illud moveatur vi N, & celeritate ut AC, hoc vi M & celeritate ut AB, corpus A ab illis impulſum pergere quidem in diagonali AD, ſed non cum celeritate AD, neque adeo illi impreſſam eſſe vim ut AD^2, ſed minorem. Notandum vero etiam eſt, etſi corpus G, ſi ſolum impingat, totum ſuum motum & vim transferat in corpus A, & corpus H, ſi ſolum incurrat, totum ſuum motum, & vim N imprimat eidem; in concurſu tamen illa corpora non imprimere corpori A utramque vim M & N totam; adeoque corpus A non acquirere ſimul vim M & N; conſequenter *hunc caſum non eſſe illum, qui nobis hic conſideratur*, & quo ſupponitur, totam vim M & N ineſſe corpori eidem A. Quæ igitur ex hoc caſu ducuntur argumenta, noſtram hac vice cauſſam non afficiunt. Monui id iam ſupra Sect. I. Schol. 1. Theor. 8. neque piget tamen, id repetiiſſe; facilis enim

Fig. 3.

enim eſt horum caſuum commixtio, niſi conſtanter caveas.

XXXVIII. Nimirum, quando corpus A a duobus illis corporibus G & H ſimul impellitur, tum illud per vim & motum ab uno G acceptum, iamiam *fugit* impulſum alterius H, quatenus directio huius cum directione prioris coincidit; adeoque ſub angulo hocce acuto BAC non poteſt tota vis alterius corporis H transfundi in corpus A; & vice verſa. Secus eſt, ubi corpus ab una vi M percuſſum, per hunc ictum *non fugit* impulſum vis alterius N. Atque ita patet, quare ſub directionibus angulum rectum comprehendentibus, tota utriusque corporis vis poſſit transfundi in tertium A, vel etiam ita res dirigi, ut ante ictum corpus unum moveatur in diagonali celeritate diagonalis, & alterum quieſcat, poſt ictum vero utrumque moveatur in lateribus celeritate laterum §. 24. In percuſſionibus igitur res habet, uti dictum eſt.

XXXIX. Ex adverſo, quando duæ vires M & N concipiuntur *ineſſe eidem corpori* A, tum per operationem vis M corpus A non fugit impulſum aut actionem vis alterius N, utpote quæ non inſequitur tantum corpus ante ſe fugiens, ſed eidem, etſi translato, inexiſtit. Reſpectu enim vis N eidem corpori A iam inſitæ, & quoad motum eius particularem in directione AC, perinde eſt, ſive corpus A moveatur etiam in directione AB, ſive non moveatur; id quod ſecus eſſet, ſi vis N nondum inexiſteret corpori, ſed eidem aut iam per AB moto, aut adhuc quieſcenti eſſet demum imprimenda. Maior enim vis corporis ſecundum leges ordinarias percutientis requiritur, ſi corpori moto eandem celeritatem ſuperaddere debet, quam ſi illam quieſcenti imprimere.

XL. Vt hæc *ad principia* reducamus *communia*, alteram directionem, v. gr. illam ſecundum AB conſideremus ut ſimplicem, alteram AC ut compoſitam ex duabus, angulum rectum comprehendentibus AE & EC. *Fig. 4.* Æquipollere & æqualem eſſe vim ſecundum AC duarum ſecundum AE & EC aggregato, patet ex ſuperioribus §. 29. ſimiliterque patet, vim ſecundum AE non afficere vim ſecundum AB (§. 28.) Reſolvitur igitur dubium in haſce duas vires, alteram M ſecundum AB, & alteram ſecundum EC, vel BF, quam Q vocabo. Oſtendendum autem eſt, quomodo ex vi M & Q in eodem corpore concurrentibus oriatur celeritas AF, & conſequenter vis totalis compoſita æqualis ſimplici cuidam $R = AB^2 + BF^2 + 2\,AB \times BF = M + Q + 2\,AB \times BF$.

XLI. Menſura virium, ope §. 29, pendet ex menſura celeritatis, itaque primo loco videbimus, quænam *celeritas* oriatur ex concurſu illarum virium M & Q? Conferatur ergo *caſus noſter cum alio* vulgari. Sit *Fig. 5.* corpus A, quod moveatur in linea HBF vi M, celeritate AB; inſequatur aliud H, vi R, celeritate $HC = AB + BF$: quid hic futurum eſt? Dicunt regulæ, poſt aliquod temporis intervallum impingere corpus H in corpus A, & illi communicare gradum celeritatis BF, ſic, ut poſt ictum corpus A moveatur celeritate $AB + BF = HC$, & corpus H celeritate $HC - BF = AB$. Habemus igitur caſum, quo corpus A ex percuſſione alterius H adquirit celeritatem AF. Quid, ſi oſtendero, illum *coincidere* cum noſtro, quo ſupponimus in eodem corpore A inexiſtere ſimul vires M & Q tales, ut ope illius ſolitariæ corpus haberet celeritatem AB, & huius ſolitariæ celeritatem $EC = BF$? Num eo facto oſtendi, etiam noſtro in caſu

per

per hancce duarum virium M & Q in eodem corpore combinationem oriri celeritatem ut AF? & conſequenter vim ut AF^2 ?

XLII. *Coincidit* vero *uterque* caſus. Circa caſum percuſſionis attende, quid *in ictu* fiat? Corpus H per celeritatem ſuam HC—BF=AB non impingit in corpus A; Tanta enim celeritate hoc fugit: ergo quicquid per hunc celeritatis gradum fieri poteſt in corpore inſequenti, id omne in hoc abſolvitur, ut per illum corpus H inſequens maneat fugienti A præſens, ſive, ut fugiens A reſpectu inſequentis H fiat quaſi quieſcens. Impulſus igitur omnis, qui fit a percutiente, talis & tantus eſt, qualis & quantus a corpore cum celeritate BF lato fieret in aliud quieſcens. Atque inde fit, ut corpori A, etſi moto, adhuc illa celeritas BF imprimatur. Videamus, an *eadem* fiant *in noſtro* quoque *caſu*? Puto fieri. Per hoc enim, quod vis Q in ipſo corpore A inſita concipitur, illa non minus ipſi A præſens eſt, & in ipſa corporis A, celeritate AB moti, translatione illud impellit, quam ſi aliud corpus H cum ſumma celeritatum ſequeretur, & conſequenter cum exceſſu unius ſupra alteram impingeret. Corpus enim A motu ſuo per AB nequaquam fugit impulſum vis Q, ipſi corpori inexiſtentis, & cum illo translatæ. Itaque quoad celeritatem corpori A imprimendam perinde eſt, ſive concipias in illo *ſimul* inexiſtere vim M, cuius ſolitarie agentis celeritas eſſet AB, & vim Q, cuius ſolitarie agentis celeritas eſſet BF; ſive dicas, corpori A ineſſe vim M, qua fugiat cum celeritate AB, & corpus H celeritate HC (=AB+BF) motum, per partem AB, relativam illam fugam in ictu ipſo quaſi

com-

compenſare, & parte altera BF impingere in corpus **A** tanquam reſpectu ſui non amplius fugiens.

XLIII. Patet, niſi fallor, veritas eorum, quæ §. 37. dixi: *Solutionem* nodi *univerſam* conſiſtere in hac idea, quod utraque vis concipiatur in eodem corpore. Id alio adhuc modo oſtendam. *Poteſt* ex corpore A & H *fieri unum* corpus: Facto autem illo vis reſultans non amplius eſt aggregatum virium ſingularium; ſed aliquid longe diverſum, & præciſe tale, ut mediante aliquo theoremate (in ſeq. §§. a priori deducendo) recidat in æſtimationem ſecundam §. 36. allegatam. Suppone lineam HF indefinite productam, concipiatur corpus A in puncto quocunque A, & H in H: quæratur, biſecando diſtantiam HA, commune centrum gravitatis duorum horum corporum in R, & ſupponantur ibi eſſe corpus $R = H + A = 2A$. Poſt aliquod tempus concipiatur A translatum uniformiter in B, & H in C, & quæratur denuo commune centrum gravitatis, biſecando lineam CB in S; erit RS via centri gravitatis, repræſentans celeritatem corporis dupli 2A.

Fig. 5.

XLIV. Iam vero *an eadem* eſt menſura virium, *ſive* illæ in uno corpore inexiſtere concipiantur, *ſive* in duobus? an utroque in caſu obtinetur aggregatum virium ſingularium? §. 36. Equidem, ſi corpora A & H, ut ſingula concipias, ſine aliqua ad ſe invicem relatione, certum eſt, haberi in uno vim $M = A \times AB^2$, in alterutro vim $T = H \times HC^2$. Sin corpora ad ſe invicem referas, ſi illa ut ſyſtema duorum corporum conſideres, ſi utramque vim ut in uno corpore duplo R concurrentem attendas: exponetur vis compoſita per factum ex maſſarum ſumma in quadratum viæ centri gravitatis($= A$
$+ H$

$+H)\times RS^2$. Eſt autem per communes regulas $RS=\frac{1}{2}(AB+HC)$ & per hypotheſin $A=H$. Itaque vis compoſita ex utraque ſingulari, cum eidem, ſed duplo, corpori ineſſe concipitur, non eſt æqualis aggregato ſingularum. Subſtitutis enim æqualibus & aſſumtis $A=H=1$ erit aggregatum illarum $=AB^2+HC^2$; vis autem compoſita $=\frac{1}{2}AB^2+AB\times HC+\frac{1}{2}HC^2=\frac{1}{2}(AB+HC)^2$. Non eſt igitur id aggregatum huic vi æquale, niſi cum $AB=HC$; qui unus tantum eſt ex caſibus infinitis. Videmus igitur ſane, *quid interſit*, an duæ vires concipiantur, ut in uno corpore, an ut in diverſis? *neque omnem* vim *compoſitam* ſtatim *eſſe aggregatum* virium componentium.

XLV. Noli autem metuere æſtimationi meæ, quoniam §. 41. dixi, quando vis M producens celeritatem AB, & vis Q producens celeritatem BF concurrant in uno corpore, oriri celeritatem $AB+BF$, & conſequenter vim $(AB+BF)^2$; cum tamen hoc loco §. 44. non emergat vis $(AB+HC)^2$, ſed eius pars tantum dimidia. *Differunt* etiam *hi caſus*. In priori collegimus utramque vim in corpus *ſimplum* $=A$. v. §. 41. in poſteriori vero in corpus *duplum* $=A+H=2A$. v. §. 44. Oſtendi autem facile poteſt, ope motus compoſiti, quod *vis* ex duabus ſingularibus compoſita, ſi *in corpus duplum collecta* fingatur, ſit tantum *ſubdupla* eius, quæ reſultat, ſi in corpus ſimplum utraque colligatur. Si enim in angulo BAC recto fingas duo corpora A & *a* moveri ſecundum AB & AC, viribus M & N; poſſunt hæ vires dupliciter concipi collectæ in corpus unum: Aut in ſimplum corpus A, & tum eius celeritas eſt AD, & vis $=A.\ AD^2$; aut in duplum corpus $A+a$, *Fig. 6.*

motum in via centri gravitatis duorum; & tum eius celeritas eſt AE, & vis $=(A+a)\ AE^2=\frac{1}{2}A\times AD^2$, palne ut ſupra contigit.

XLVI. Fortaſſis videor obliviſci eorum, quæ §. 26. & ſeqq. dixi, *ex actionibus* virium repetendas eſſe difficultatum declarationes, utpote de quibus altum nunc eſt ſilentium? Atqui vero priora omnia eo pertinent, ut liceat intelligere, quod ex ipſa virium harum actione reſultet id, quod intendo. Nimirum in æſtimatione eius, quod ex utraque vi M & Q in corpore A reſultat, non ſolum attendendum eſt, quid utraque, ſi ſola eſſet, ſeorſim in hoc corpus ageret, ſed etiam, quid illæ, ſi coniunctim eidem corpori inſint, *in ſe invicem* agant. Accipe, quid fiat? 1. Vis M in ſingulis
Fig. 4. tempuſculis transfert corpus A per ſpatiolum ut AB. 2. eadem vis M una cum corpore etiam transfert vim illi corpori inſitam Q: Atque adeo efficit, ut vis Q ſit corpori, licet fugienti, cum tota ſua celeritate præſens. 3. Vis Q in iisdem tempuſculis transfert corpus A, quod reſpectu ſui non poteſt conſiderari ut fugiens, per ſpatiolum ut EC=BF: & 4. eadem vis Q etiam una cum corpore per hoc ſpatiolum transfert vim illi inſitam M: adeoque fit ut 5. per actionem vis utriusque & corpus & vires illi inſitæ transferantur per aggregatum ſpatiolorum cum celeritate ut AB+BF; & conſequenter 6. vis ſimplex idem motus phænomenon præſtitura, hoc eſt, vis ex utraque illa reſultans ſive compoſita (vide def. 4. Sect. 1.) ſit æqualis $(AB+BF)^2$. Ita igitur conficitur, *a diverſa* virium *concurrentium actione* pendere diverſam virium compoſitarum & motus abſoluti quantitatem, non ſecus atque a diverſa virium mortuarum applicatione

tione, & conſequenter actione, pendebat diverſitas momenti & effectus v. §. 33.

XLVII. Diximus de caſu virium coincidentium, quo fit, ut celeritas reſultans æquet aggregatum celeritatum ſingularum. Ex eo pendent omnia, quæ de *directionibus* dici debent *conſentientibus*. Ratio enim augmenti, quod in hiſce caſibus ſupra aggregatum ſingularum virium accedit, intelligitur ex reſolutione alterius (AC) virium conſentientium in duas ſimpliciores (AE & EC) quarum una eſt perpendicularis directioni AB, altera coincidens. Duplum ſcilicet factum, quod per Theor. VII. accedit aggregato virium ſingularium, ex eo eſt, quod vis M una cum corpore A transfert vim Q per ſpatium ſuæ celeritati AB reſpondens, & viciſſim vis Q una cum corpore A transfert vim M per ſpatium ſuæ celeritati EC reſpondens; hoc eſt, quod vis utraque in corpore moto inſit, atque in illud agat, tanquam reſpectu ſui quieſcens. Cum enim ex hoc reſpectu fiat, ut celeritas compoſita æquetur aggregato ſimplicium: Influit ille neceſſario quoque in æſtimationem vis compoſitæ ex utraque oriundæ, hoc eſt, vis ſimplicis, quæ ſola idem motus phænomenon produceret.

XLVIII. *Exemplum* eiusmodi virium *coincidentium* ſupra iam Sect. I. Theor. 12. produximus gravitatem corporum naturalem. Ibi enim ſecundo momento accedit ex actione cauſſæ gravificæ nova vis viva Q ſeorſim æqualis illi M, quæ primo impreſſa erat: ſed coniunctæ faciunt vim T, prioris M quadruplam, non duplam tantum. vid. loc. cit. Eadem vero *gravitas proiectioni coniuncta* nunc *exemplum* eſſe poteſt motus compoſiti ſub duabus directionibus *conſentientibus* quidem, ſed

non coincidentibus. Sit directio proiectionis AB obliqua ad horizontem, & faciat cum directione gravium
Fig. 7. AC angulum BAC acutum. Sit vis proiectionis inſita & uniformis; & vis a gravi cadente acquiſita in ſingulis momentulis indefinite parvis habeatur etiam pro uniformi: percurret corpus *diagonalem Mm* illius parallelogrammuli, cuius latera MR & MN exprimunt celeritates, ſive radices virium in M ſecundum illas directiones urgentium; ſcil. MR celeritatem proiectionis æquabilem, & MN celeritatem vis per gravitatem impreſſæ, proportionalem radici lineæ AC, ſive MD. Habemus igitur vim ut MR^2, & vim ut MN^2: & ex earum concurſu oritur vis ut Mm^2. Plane, uti ſupra diximus, fieri in motu compoſito. Conf. Sect. I. Theor. 8. Schol. 1. num. 3.

XLIX. Illud non opus erit prolixius inculcare:
Fig. 8. Cum directiones ſunt *diſſentientes*, angulumque BAC faciunt obtuſum; non hoc dici, vim utramque M & N ſimul inexiſtere corpori A ut vivam. Cum enim motus ſecundum directionem FC, & ſecundum directionem FD*d* ſimul realiter fieri in eodem corpore non poſſit: etiam vires vivæ ſecundum FC, & ſecundum FD*d* non dicuntur ſimul inexiſtere revera. v. Def. 1. Sect. I. Verum hic ſenſus eſt: Si corpori A inſit vis M, qua ſola dato tempore ex A perveniret in B, & ſupponatur eidem nunc accedere vis N, qua ſola dato tempore ex A perveniret in C, tunc aliquam virium harum partem in corpore A elidi, & remanere aliquam ſaltem. Reſoluta enim vi $N = AC^2$ in duas $AF^2 + CF^2$ per §. 25. altera quidem pars, ſecundum AF urgens, integra permanet; ſed altera ſecundum FC agens reſiſtit vi

M ſe-

M ſecundum FDd agenti, & eandem retro fert cum corpore, ſive effectum eius tantundem ſufflaminat. Poſſent igitur hic ſimilia dici, uti §. 46. diximus; & exempla ſumi a gravibus aſcendentibus ex Theor. 13. Sect. I. vel etiam ex proiectionibus ſurſum factis, uti §. 48. fecimus circa conſentientes.

L. Atque hæc ſunt, quæ mea opinione non ſolum *paradoxi ſpeciem* ſententiis detrahunt noſtris, easdemque cum receptis in concordiam reducunt theoriis; ſed etiam ipſas *virium vivarum origines* aperiunt. Vis finita omnis, cuius celeritas eſt C, poteſt concipi tanquam compoſita ex pluribus coincidentibus, quarum celeritates ſunt $\frac{C}{m} + \frac{C}{n} + \frac{C}{p} + \frac{C}{q}$ &c. modo ſumma harum celeritatum partialium fiat $= C$; eo plane modo, quo diximus de vi a gravitate naturali cadendo acquiſita. Igitur æſtimatio vis ex hac compoſitione emergentis ſequitur Theorema VIII. Inde *quadratum* celeritatis totalis.

Membrum IV.

LI. Si quis pernoſſe cupiat ipſam alicuius menſuræ rationem vel originem: debet ſine dubio inquirere in *geneſin rei menſurandæ*. Id igitur ita imitatus ſum. In corpore aliquo A quieſcente vires etiam vivæ, & (ſi rem in vacuo, hoc eſt materia non reſiſtente concipias) puræ generantur percuſſione corporis alterius H moti, & in corpus A impingentis. Supponamus aliquem *ſpecialem caſum*, &, quid in illo accidat, inquiramus. Sint duo corpora ſphærica & elaſtica, A & H, inter ſe æqualia; Fig. 9.
quieſcat A; moveatur H celeritate HC in directione HC; impingat H directo impulſu in A: dicunt regulæ,

 poſt

poſt ictum corpus A moveri in directione eadem AB, celeritate AB=HC, & corpus H quieſcere. Ex hoc vero ſequitur, *vires vivas*, quæ in corpore H ante ictum fuerant, in eo *extinctas* eſſe; & in corpore A, in quo nullæ erant, *genitas* eſſe æquales prioribus: ſive, ſi malis, vim vivam ex corpore H *tranſiiſſe* in corpus A. Quæritur, quid eo in caſu factum ſit, ex quo liceat *menſuram* eruere harum virium?

LII. Hic ſciendum eſt: 1. *Naturam* pro veteri ſua conſuetudine *nihil* agere *per ſaltum*, hoc eſt, non tranſire ab extremis ad extrema ſine tranſitu per intermedia omnia. 2. Non igitur corpus naturale in quiete poſitum acquirere finitum aliquem celeritatis gradum, niſi *per accelerationem*, ſimilem illi, quam experiuntur gravia a quiete lapſum incoantia. 3. Convenire huic ideæ naturam corporis *elaſtici*; dum enim corpus H finito velocitatis gradu HC impingit in corpus A, tendi utriusque corporis elaterem, neque corpus A in primo impulſionis inſtanti loco ſuo dimoveri cum celeritate HC, ſed cum illa huius velocitatis parte, quæ non impenditur ad tenſionem elateris. 4. *Non* itaque una aliqua elementari vel *inſtantanea* percuſſione conſumi in corpore H impingente, & generari in corpore patiente A vim vivam motricem: Sed 5. requiri *percuſſiones* elementares *plurimas*, a quibus illa corporis A antea quieſcentis ſucceſſiva acceleratio procedat. 6. Requiri autem, ut percuſſio quæcunque fiat *cum gradu* celeritatis *maiori*, quam eſt ipſa corporis A iam incoata translatio. Neque
Fig. 10 enim 7. corpori A cum celeritate AS moto poſſe novam celeritatem SV per corpus H inſequens imprimi, niſi hoc corpus H moveatur cum celeritate AS+SV. Itaque

8. ut

8 ut corpus A in quiete poſitum ex percuſſione corporis H recipiat gradum celeritatis AB, neceſſe eſſe, ut *totidem percuſſiones elementares* fiant, ac elementula SV contineantur in AB: Neceſſe etiam 9. ut ſingularum percuſſionum celeritates ſint æquales lineis AS, AV &c. Faciendo igitur BC=AB & complendo triangulum ABC 10 *Singula elementula* STXY exprimere ſingulas percuſſiones elementares, quæ in corpus A celeritate AS iam latum, pro ingenerando novo gradu celeritatis SV fieri a corpore H debeant: & 11. *Aream trianguli* ABC exponere ſummam omnium percuſſionum elementarium, quæ in corporis H incurſu verſus A fieri, & a corpore A recipi debeant: Adeoque 12. ſummam illam eſſe proportionalem *quadrato* celeritatis AB.

LIII. Eſſe vero 13. *ſummam hanc* percuſſionum elementarium *proportionalem vi vivæ*, in corpore H exſtinctæ, & in corpore A genitæ; quoniam omnes illæ procedunt a vi viva corporis H, antequam ipſa exſtinguitur, & omnes recipiuntur a corpore A ante, quam vis viva celeritatis AB gignitur. *Non* poſſe ſcil. æſtimationem vis vivæ *maiorem* eſſe hac percuſſionum ſumma, quoniam per has *ſolas* in corpore H exſtinguitur, & in altero A gignitur. *Non* eſſe *minorem*, quoniam vis viva corporis H illas *omnes* exerit, & corpus A eas omnes recipit, atque aptum ſit tantumdem exerere: Igitur hanc eſſe iuſtam æſtimationem, ſive 14. *vim vivam* eſſe *proportionalem quadrato* celeritatum.

LIV. His poſitis, quæro, num loco *definitionis*, uti in hoc negotio dari ſolent, proportionalis, dici poſſit: vim vivam eſſe ſummam omnium percuſſionum elementarium, quæ impendi debent a corpore aliquo moto, donec

donec id alteri quieſcenti elaſtico, & æquali imprimat motum conceptum cum finito aliquo gradu celeritatis?

LV. Equidem, quæ huc uſque dicta ſunt, ex ipſa percuſſionis & ſucceſſivæ accelerationis natura ſequuntur, quocunque illa medio aut modo fieri naturaliter concipias: neque meum eſt hoc loco, exponere prolixius, quomodo illæ percuſſiones elementares fiant? Puto tamen, nihil in eo abſurdi eſſe, ſi *integram percuſſionis* memoratæ *œconomiam* ſic concipias. Dum corpus H impingit in corpus A tamdiu tenditur elater, quamdiu comprimitur ab ictu: comprimitur autem, donec utrumque corpus feratur celeritate & directione eadem. Ea tenſione abſoluta reſtituitur elater motu accelerato, qualis in chorda arcus tenſa obſervatur: & per hanc elateris actionem fit ſecunda in celeritate corporum mutatio, æqualis primæ; reddit enim elater, quicquid abſorpſit. Cumque ab initio facilius cedat elater, minor eſt corporis impulſi localis translatio, creſcens uſque ad tempus ſummæ tenſionis, idque ex ſola corporum colliſione: Hoc autem peracto maneret utrique corpori celeritas eadem, niſi per reſtitutionem elateris, etiam acceleratam, alteri decederent, accederentque alteri corporum novi celeritatis gradus.

LVI. Dabimus *ſchema.* Quieſcat corpus A, &
Fig. 11. alterum æquale H irruat directe & cum celeritate HA in corpus A: Duretque huius tota impulſio per tempusculum finitum. Per impulſum primum corporis H factum cum celeritate HA, duo fiunt in corpore A: Partim tenditur elater, partim imprimitur corpori A celeritas initialis Aa. Concipi igitur poteſt, corpori H deceſſiſſe gradum velocitatis $ba = Aa$. In ſecundo igitur

tur momentulo infiniteſimo impingit H cum celeritate *bb*, & præter novam elateris tenſionem imprimit corpori A gradum celeritatis novum $a\alpha$: quo a velocitate corporis H detracto ipſi ſupereſt celeritas $\alpha\beta$, & ſic porro, donec tenſione ad ſummum perducta corpus A moveatur celeritate CD, & alterum H ſequatur velocitate æquali EF. Atque hic iam ceſſarent, ut ante dixi, incrementa & decrementa celeritatum, niſi reſtituens ſeſe *elater* accederet Quid igitur ille?

LVII. Dum ſe utriusque corporis *elater* accelerato motu reſtituit, *duo* fiunt : *Primo*, hæc corpora non obſtantibus celeritatum ſuarum novis variationibus per totum reſtitutionis tempuſculum ſunt ſibi præſentia, ſive contigua; *ſecundo* per elaterem corporis H reagentem accedit nova percuſſionum ſumma in corpus A, & per elaterem corporis A retro agentem deſtruitur celeritas corpori H adhuc reſidua. Summa illa exprimitur per aream FGK : unde fit, ut in ſingulis huius tempusculi infiniteſimis corpus A impellatur a celeritate *fg*, $\phi\gamma$, &c. Unde tandem ultima corporis A velocitas erit æqualis KL$=$LM$=$HA.

LVIII. Arbitror, hæc convenire cum prioribus §. 52. & 53. neque adverſari *receptis* de percuſſione doctrinis : Sint enim duo corpora M & *m*: illorumque celeritates C & *c*. Sit $c=o$, quoniam ad hunc caſum omnes reduci poſſunt. Sequitur ex dictis noſtris, tendi elaterem, donec celeritas corporis utriusque ſit$=$ $\frac{MC}{M+m}$. Erit autem ictus; conſequenter & elater $=$ $\frac{MmC}{M+m}$. Sed elater in utramq; partem reagit: Applicatus itaque ad maſſam M corporis impellentis, dat per communia

P celerita-

celeritatem $=\frac{mC}{M+m}$, & quidem in partem contrariam, ut adeo celeritas poſt ictum fiat $=\frac{MC-mC}{M+m}$, & vis compoſita per Theor. 10. $=\frac{M(MC-mC)^2}{(M+m)^2}$. Sed applicatus ad maſſam m corporis antea quieſcentis, dat novam velocitem $=\frac{MC}{M+m}$, quæ priori addita, facit velocitatem totalem $=\frac{MC}{M+m}+\frac{MC}{M+m}$, & vim compoſitā per Theor. 8. $=\frac{m(MC+MC)^2}{(M+m)^2}$ Eſt igitur hic novum *ex Natura* exemplum virium repugnantium & coincidentium. Sit v. gr. $M=m=1$. erit velocitas corporis m a colliſione ſola $=\frac{1}{2}C$, & vis $=\frac{1}{4}C^2$; eademque erit celeritas & vis ab elatere genita, ſi ſeorſim ſumatur. Quia enim $M=m$, æqualis in utroque corpore effectus eſt elateris ſeſe reſtituentis; & effectus in corpore M eſt deſtructio celeritatis $=\frac{1}{2}C$, & vis $=\frac{1}{4}C^2$: Igitur in corpore m effectus hic ſeorſim conſideratus, foret etiam celeritatis $=\frac{1}{2}C$, & vis $=\frac{1}{4}C^2$. Sed additus corpori ut jam moto, per §. 42. facit celeritatem $=C$, & vim $=C^2$, conformiter theoriæ hactenus expoſitæ.

LIX. Neque vero per novam hanc percuſſionis explicationem improbo illam auctorum conſuetudinem, qua *ictum* concipiunt, *ut momentaneum*. Faciunt illi pro ſuo ſcopo, quærentes *celeritatem* corpori percuſſo impreſſam. Hic enim ſufficit attendere percuſſiones elementarium mearum ultimas. Feci autem & ego pro meo ſcopo, quo *ipſam virium* vivarum *impreſſionem* & illius ſeriem exponere *ſine ſaltu* neceſſum erat. *Carteſii exceptionem* non moror. Ille *Galilæo* ſucceſſivas acce-

cele-

celerationes urgenti, oppoſuit *globum e tormento propulſum*, qui globulum quieſcentem in via ſua poſitum ante ſe promoveat: Globulum enim eo in caſu non propelli tardius ab initio, & ſucceſſive demum accelerari; quoniam alias & ipſe globus impellens ab initio tardius ferretur, & deinde celerius ſucceſſive. v. *Tom.* III. *epiſt.* 104. *p.* 401. 402. Poſſes credere, iſta feſtinanter ſcripta eſſe: Namque alio in loco ipſe ſuppeditat, quæ reſpondeas. v. Tom. II. epiſt. 109. p. 367. Mihi ſic videtur: *Aut* de naturalibus quæritur corporibus, *aut* de aliis fœcunda imaginatione natis. Si de illis: *Elaſtica* ſunt, atque hic dici poteſt, centrum globi impellentis non ferri ab ictus initio tardius, & deinde velocius. Pendet hoc ab elatere corporum, quo fit, ut *partes* ab ictu *preſſæ cedant*. Sin *perfecte dura* fingas corpora; nihil ad illa pertinet lex naturæ §. 52. n. 1. enarrata, nihil etiam noſtra, quæ exinde fluunt, corollaria. Diu eſt, quod per illam ſuppoſitionem ſaltus naturæ obtrudi monuerunt eruditi. Ego curioſioribus *quæſtionem* commendo *ſequentem*: An corpori duro quieſcenti a corpore duro incurrente communicetur vis viva inſita? an illud ſolum ab inſequenti corpore promoveatur, uti pondus vecti moto impoſitum?

LX. Denique illud operæ pretium eſt annotare: Ex præſenti dilucidatione diſpaleſcere *vera* virium mortuarum, elementorum vis vivæ, & vis vivæ ipſius *diſcrimina*. Dixi §. 2. ambiguitatem latere in formula loquendi, cum dicitur, vires mortuas eſſe proportionales facto ex maſſa in celeritatem. Eſt illa plerumque innoxia: Placet tamen hoc paragrapho ab eadem abſtinere. Mea ſic eſt ſententia. Expono *vim mortuam*,

hoc eſt, potentiam tantum nitentem *per dimenſionem unam*; atque id in corpore naturaliter gravi fieri poteſt per maſſam. *Momentum* huius *vis mortuæ*, ſive, quod idem eſt, actionem potentiæ nitentis (v. Sect. I. def. XI) repræſento *per* dimenſiones *duas*, v. g. per rectangulum ex maſſa in celeritatem niſus. Si nullus generatur ex hoc niſu motus, res omnis manet in hiſce terminis, & ſinguli hi niſus per contrarios & æquales eliduntur. Concipio igitur hæc momenta vel niſus tanquam rectangulum aliquod, quod fluere quidem conatur, ſed ab alio æquali impeditur, adeoque ſolidum generare non poteſt. Sed *virium vivarum elementa* (hoc eſt, id novi, quod ex continuata & non impedita virium mortuarum actione, tanquam ex fluxu ſuperficiei, generatur) opus habent *tribus dimenſionibus*. Præter enim actionis vel momenti fluentis menſuram, attendi etiam celeritas fluxus debet; ſiquidem §. 62. patebit, in percuſſione corporum tanto celerius fluere impetus illos, quanto eſt celeritas corporis percutientis maior. Itaque elementum vis vivæ exponetur per *priſma elementare*, cuius unam dimenſionem facit vis mortua nitens, alteram celeritas niſus, tertiam continuatio & quaſi fluxus elementaris huius momenti per contrarios niſus non impediti. Denique *vires* ipſæ *vivæ* exprimentur *priſmate* illo *finito*, quod exſurgit ex integratione omnium horum priſmatum elementarium. Ex quo conſtat, neque ex replicatione additiva virium mortuarum componi vivas; neque per diviſionem redigi vivas in mortuam: non magis atque id de ſuperficiebus & ſolidis dici poteſt. Patet etiam, cur & quo ſenſu vis viva atque mortua ſint *heterogeneæ*?

LXI. Patet denique, adeo *non diſſentire* menſu-

ram

ram virium vivarum Leibnitianam a vera mortuarum æſtimatione, ut potius altera ſequatur ex altera.

Membrum. V.

LXII. Supereſt, ut ex hac Theoria rationem reddamus, *cur vires vivæ inæquales* ſibi occurrentes *faciant æquilibrium*? Debeo id propter Sectionis I. Theor. 8. Schol. 2. Id vero ex hactenus dictis ſponte ſequitur, ſi unicam illam *Lemmatis* loco propoſitionem addideris, quam §. 60. modo ſubinnuimus. *Ea hæc eſt.* Si duo corpora A & B celeritatibus, quæ ſint maſſarum reciprocæ, in ſe invicem, vel in corpus medium C directe incurrant, *percuſſiones* utriusque ſunt *iſochronæ*; id enim niſi foret, alterutrius preſſio prævaleret, poſtquam ceſſavit impulſio alterius. Conſequitur autem ex hoc lemmate, quo maior eſt corporis A impellentis velocitas, eo celerius ſibi ſuccedere impetus, ſive momenta vis nitentis; ut adeo, *ſi non impedirentur*, elementula ex fluxu horum niſuum oriunda §. 52. maiora fierent elementulis ex fluxu impetuum corporis B tardioris eodem tempuſculo oriundis. *Si vero impediantur* illi impetus, ob continuitatem actionis in utroque A & B ſequitur, ſingulos niſus elidi per alios ſibi oppoſitos & æquales, adeoque naſci æquilibrium. *Fig.* 12.

LXIII. Videtur hoc prima ſpecie *paradoxum*, ſed *nihil* tamen *abſurdi* comprehendit. Si nunquam fluant libere momenta corporis nitentis, opponitur rectangulum rectangulo, neque oritur tertia dimenſio; itaque ſi MC=*mc* (manendo in denominatione §. 58.) obtinebit æquilibrium; neque generabitur ab eiusmodi im-

petibus vis viva in corpore C medio, & utrinque percuſſo. Sin ita rem concipias, ut corpus A impingat in aliud quieſcens æquale D, & corpus B in aliud ſibi æquale E: Non impedientur niſus corporum A & B, ſed ita recipientur a corporibus D & E, ut ex eorum continuatione generetur vis viva in D & E. *Menſura* vero *huius vis*, quæ ita gignitur, *non tantum* ſequitur magnitudinem impetuum, *ſed* proportionem fluxus *quoque*, quo illi ſe excipiunt. Unde conſtat, vim genitam, poſitis licet MC=*mc*, tamen inæqualem fore, ſi differat tertia dimenſio, hoc eſt, celeritas fluxus, quo ſibi ſuccedunt hi impetus v. §. 60. Cumque tertia hæc dimenſio etiam ſequatur proportionem celeritatis: patet ex uno latere, cur vires vivæ in corpore D & E genitæ, exprimantur per MCC & *mcc*, uti vires corporum A & B; & ex altero, cur ſibi æquilibrium faciant hæ vires in ſe invicem, vel in idem corpus C, impingentes.

Fig. 12.

LXIV. Perſpicuitatis gratia, dicam id *in ſimili* quoque. Fingatur *vectis* AB fulcro C impoſitus. Egrediantur ex ipſo fulcri centro C duo corpora *a* & *b*, & ferantur per brachia *a*A, & *b*B celeritatibus, quæ ſint reciprocæ maſſarum, ut habeamus MC=*mc*. Hic recte dici poteſt: corpus *b* in ſingulis lineæ *b*B punctis exerere impetum, qui ſit ut rectangulum ex maſſa in diſtantiam a centro. Adeoque poſito BD=BC, *ſi* impetus illi omnes *reciperentur libere* a corpore aliquo L=*b*: exprimeretur earum ſumma per aream CBD ductam in maſſam L. Similiter corpus *a* in ſingulis lineæ *a*A punctis exerit impetum proportionalem rectangulo ex maſſa in diſtantiam a centro: itaque, facto AE=AC, ſi & hos impetus ſine obſtaculo collectos conciperem in corpus aliquod M=*a*;

Fig. 13.

M$=a$; exponeretur earum ſumma per aream CAE ductam in maſſam M. Atque hic caſus obtinet in percuſſione ſuperius expoſita §. 51. — 53. itemque in corporibus libere cadentibus, ſi corpus L$=b$ cadat tamdiu, donec acquirat celeritatem ut CB, & corpus M$=a$, donec acquirat celeritatem ut CA; in hiſce enim caſibus impetus cauſæ impellentis & gravificæ omnes recipiuntur in corpore cadente, adeoque generantur vires proportionales hiſce priſmatis. Sed quoniam *in caſu vectis noſtri*, nunquam libere fluunt impetus, ſed perpetuo ſe deſtruunt, numquam tertia oritur dimenſio, neque adeo per impetus hoſce ſucceſſivos generantur areæ CAE, vel CBD, & ex illis priſmata: ſed ſingula ſibi invicem rectangula b. BD, & a. AE, vel generaliter (ſumendo, Cβ: Cα = CB: CA:) rectangula b. $\beta\tau$ & a. $\alpha\varepsilon$ ſibi invicem æqualia ſemper ſibi opponuntur. Unde neceſſario oritur æquilibrium. Atque hoc idem ſequitur, cum duo ſibi invicem corpora occurrunt, quorum vires ſunt reciprocæ maſſarum.

LXV. Supereſt unicum, quod omitti nolim. Qui Leibnitianam æſtimationem tuentur, ſæpius in ore habent, *vires* totales eſſe *effectibus* ſuis *proportionales*. Iam in caſu duorum corporum, cum fuerit MC$=mc$, videmus, ponendo corpora non elaſtica, effectum virium corporis A hunc eſſe, ut deſtruant vim corporis B; & effectum virium corporis B eſſe, ut deſtruant vim corporis A. Itaque *videri poſſet*, pro effectu virium in A, poni poſſe vires in corpore B deſtructas: Adeoque propter effectus & virium æqualitatem vires utriusque corporis eſſe æquales. Id *in vulgari* æſtimatione locum habet; eſt enim MC$=mc$, quoties datur eiusmodi æquilibrium: Sed *in Leibnitiana*

na fallit plerumque, quia pro caſu æquilibrii, vires MC^2 non ſunt æquales viribus mc^2; ſed $MC^2 : mc^2 = m : M$. *Quid* hic *pro Leibnitio* dicendum eſt?

LXVI. Nimirum *hoc*: vires corporis B, deſtructæ a viribus corporis A, non poſſunt haberi pro effectu viribus A proportionali, niſi *maſſæ* ſint *æquales*. Id *duplici* modo oſtendam. *Primo*, cum vires æſtimantur ex effectu integro, effectus dicit reſiſtentias, per quas conſumuntur vires in corpore moto: reſiſtentiæ igitur illæ debent ſpectari reſpectu corporis, cui fiunt: itaque & virium niſus, & reſiſtentia niſum deſtruens debet applicari ad maſſam eandem. *Secundo* enim loco, niſi id feceris, nullam habebis virium menſuram; ponendo enim x pro m, & y pro c: æquilibrium erit, quoties $MC = xy = mc$; Sed xy^2 poteſt hoc non obſtante infinitis modis differre a quantitate mc^2, ſic, ut non ſit $Mc^2 : xy^2 = m : M$, niſi quando $x = m$. Igitur vis corporis B æquilibrium facientis cum corpore A $(= xy^2)$ non poteſt aſſumi pro menſura virium corporis A determinata.

LXVII. *Cautelam* igitur neceſſum eſt ſequentem attendere: Cum vires æſtimantur ex reſiſtentiis, per quas conſumuntur, reſiſtentiæ illæ ſpectantur *ut receptæ ab hac maſſa*, vel ut profectæ a maſſa æquali; nequaquam vero ab alia inæquali. Ita fit in gravibus motu retardato aſcendentibus: Ita etiam fieri in percuſſionibus debet. Patetque novo exemplo, quantum momenti lateat *in diſcrimine maſſarum*, cum agitur de viribus, & earundem inter ſe comparationibus. conf. §. 44. 45.

DE

fig: 1.





fig: 2.

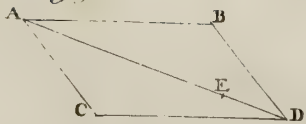


fig: 3.

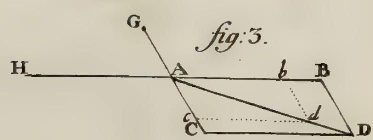


fig: 4.

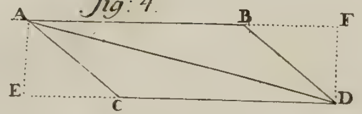




fig: 5.

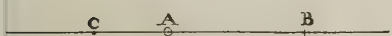


fig: 9.

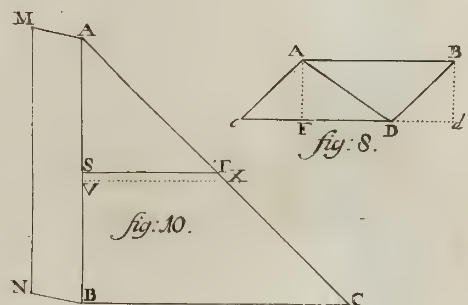


fig: 10.

fig: 8.

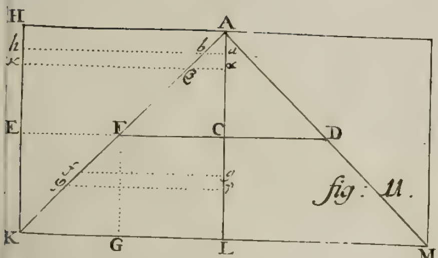


fig: 11.

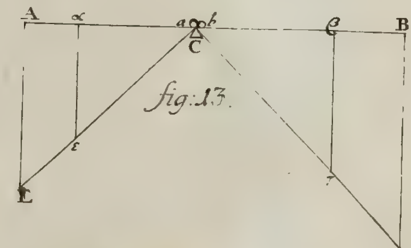


fig: 13.

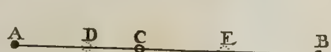
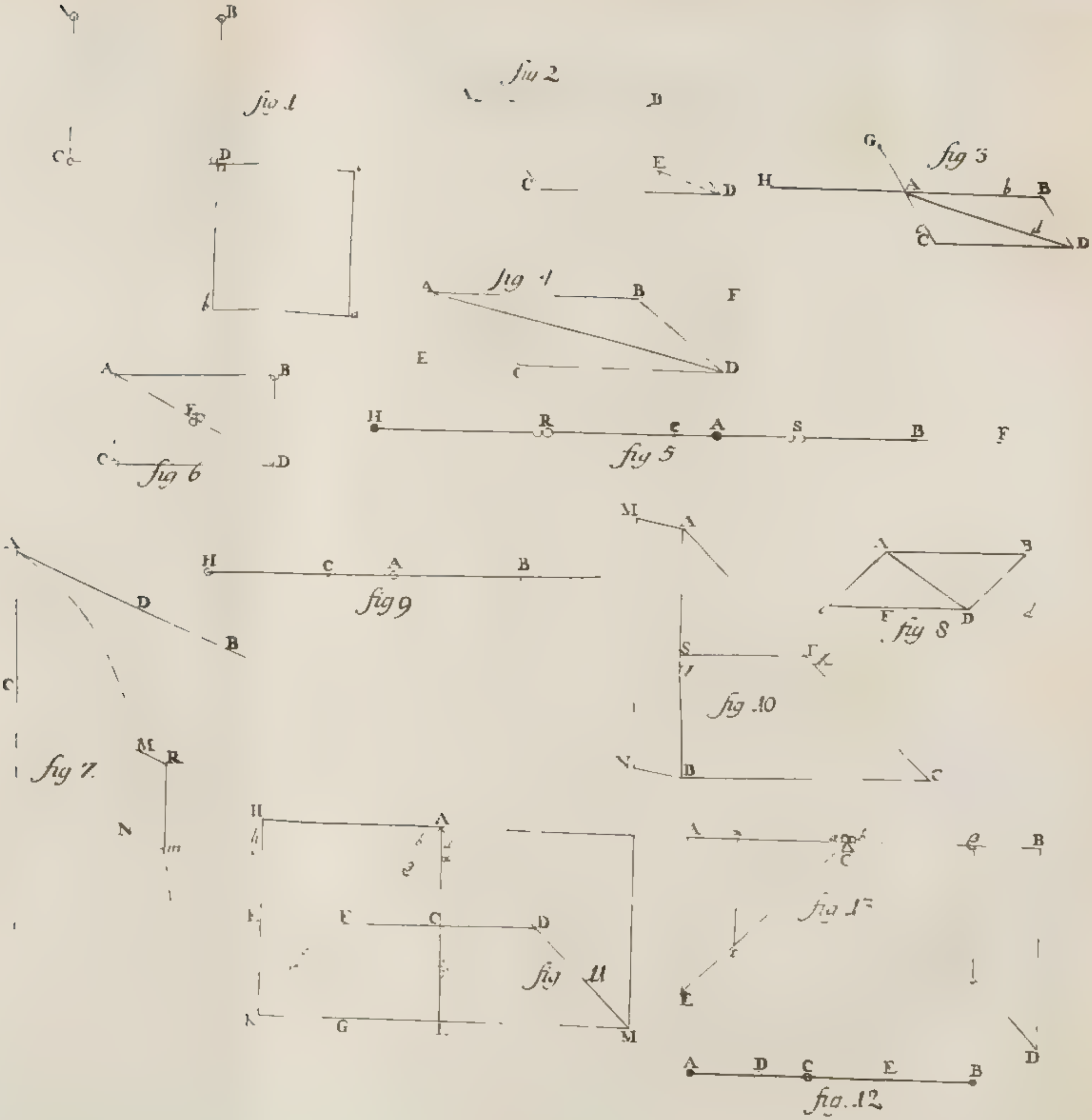


fig: 12.


fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig 6
fig 7
fig 8
fig 9
fig 10
fig 11
fig 12

DE MOTV CORPORVM EX PERCVSSIONE.

DISSERTATIO,

Auctore

Nicolao Bernoulli, Ioh. F.

Hypotheſes.

I.

COrpora duo, E & F, per altitudines EB, FC, ex quiete libere delapſa, ſi velocitatibus ultimo acquiſitis directe ad ſe invicem impingant in M, eam poſt ictum velocitatem mutuam habebunt, ut ſi cum ſua ſingula aſcendant, donec velocitate utriusque exhauſta pervenerint in ſitum $\varepsilon\Phi$, eorum commune centrum gravitatis priſtinam unde prius deſcenderat altitudinem acquirat, neque eam transgrediatur. M. Nov. 1725. *Fig* 1.

Notiſſimum hoc eſt Hugenii axioma, quo paſſim uſus eſt, quodque adeo evidens reputabat, ut in pari occaſione incidenter tantum id monuiſſe ipſi ſuffecerit, in tractatu ſuo poſthumo de motu corporum ex percuſſione.

II. Duo corpora æqualia A & C velocitatibus æqualibus eodem momento contra tertium quieſcens B impellentia, æquali etiam poſt ictum, velocitate reſilient. *Fig.* 2.

Fig. 3. III. Si duo corpora ad ſe invicem impingentia velocitatibus AB & FL, poſt impulſum velocitatibus $\alpha\beta$ & $\phi\lambda$ recedant, eadem vero corpora aliis etiam velocitatibus ED, MN ſibi occurentia reſiliant velocitatibus $\epsilon\delta$, $\mu\nu$. Ipſa quoque hæc corpora ſe pellentia velocitatibus totalibus AB+FL & ED+MN, totalibus $\alpha\beta+\phi\lambda$ & $\epsilon\delta+\mu\nu$ repellentur.

Sequitur hinc quod duorum corporum velocitatibus *a* & *b* poſt ictum ſe mutantibus in velocitates *p* & *q*, etiam earum æque multiplices *na* & *nb* poſt conflictum productur æ ſint æque multiplices *np* & *nq*.

Fig. 4. IV. Duorum corporum velocitatibus AB, CB, degenerantibus poſt ictum in alias $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, erunt viciſſim AB, CB velocitates poſt impulſum eorundem corporum quæ ante hunc velocitatibus $\alpha\beta$, $\gamma\beta$ ſibi occurrerant.

Pendet hæc hypotheſis ab axiomate generali, quo dicimus quod abeunte effectu in cauſam, viciſſim cauſa in effectum mutetur.

Fig. 5. Hoc illuſtrant principia Catoptrica & Dioptrica, quod radio AB reflectente aut refringente ſecundum BC, viciſſim radius CB reflexus aut refractus viam lineæ AB ſit initurus.

Lemma

Fig. 1. Sint duo corpora quæcunque ſibi directe occurrentia in M velocitatibus BM, CM, quas cadendo per altitudines EB & FC acquiſiverant. Ponantur eadem corpora poſt impulſum velocitates acquiſiviſſe quibus ad altitudines verticales ϵB, ϕC aſcendant. Dico centrum commune gravitatis corporum tam in ϵ, ϕ, quam in E, F conſtitutorum fore in S, interſectione linearum EF, $\epsilon\phi$.

Si

Si enim eſſent in P & O foret EO. OF :: εP. PΦ aut componendo EF. OF :: εΦ. PΦ & alternando EF. εΦ :: OF. PΦ. Dein ob triangula ſimilia E S ε, FSΦ eſt ES. SF :: εS. SΦ, vel EF. SF :: εΦ. SΦ, vel EF. εΦ :: SF. SΦ, unde deducitur OF. PΦ :: SF. SΦ, vel OF. SF :: PΦ. SΦ. Q. E Abs.

Propoſitio I.

Exiſtentibus duorum corporum velocitatibus quibuscunque, erit ſumma productorum cuiusvis corporis in quadratum ſuæ velocitatis eadem poſt ictum quæ fuerat ante.

Poſitis enim quæ prius manifeſtum eſt ob centrum gravitatis in S lineas FS & ES fore ut corpora E & F, aut ε & Φ, dum lineæ EB, FC ; εB, ΦC ſunt ut quadrata velocitatum ante & poſt ictum. His poſitis erit ES. SF :: Eε. ΦF, adeoque ES×ΦF=SF×Eε, ac conſequenter EB×SF+FC×SE=EB×SF+Eε×SF+CF×SE—ΦF×SE=εB×SF+ΦC×SE. Q.E. D. *Fig.* 1.

Qui quantitatem virium in rerum natura conſtantem aſſerunt, huius propoſitionis veritatem tanquam corollarium ex theoremate Leibnitiano, quo quantitatem virium quadratis velocitatum proportionalem dicit, deducere poſſent.

Propoſitio II.

Binorum corporum D & C velocitatibus oppoſitis & maſſis quæque ſuis reciproce proportionalibus præditorum, eadem erit ſigillatim velocitas poſt impulſum quæ fuerat ante. *Fig.* 6.

Sit corpus $D=m$, eius velocitas $DB=p$, corpus

C$=n$, erit eius velocitas CB$=\frac{mp}{n}$. Concipiatur corpus maius D diviſum in duo corpora α & β, quorum prius α ſit $=n$, ac proin $\beta=m-n$, & diſponantur ita ut eorum commune centrum gravitatis ſit in D. Patet quod hæc duo corpora α & β virgæ $\alpha\beta$ rigidæ gravitatis experti atque velocitate DB ſe moventi adhærentia, eundem plane effectum in corpus C ſint exercitura, quem corpus D eadem ſua velocitate motum produxiſſet, nec non, quod hic effectus conſtans ſit permanſurus quomodocunque ſe moveant corpora α & β durante motu puncti D in linea DB, dummodo centrum commune gravitatis non recedat a puncto D.

Ponatur ergo moveri corpus β velocitate βD$=$BD $=p$, & corpus α velocitate αD quæ erit$=\frac{mq-np}{n}$; fingatur inſuper circumrotari virga $\alpha\beta$ circa punctum D ut ſitum acquirat ADB, dum interea punctum D fertur velocitate DB, quo fiet ut corpus β poſitum in B (utpote duabus velocitatibus æqualibus & directe oppoſisis gaudens) prorſus ſit quieturum, & α poſitum in A ſe moturum velocitate AD$+$DB$=\frac{mp}{n}=$CB. Corpus ergo C (per Coroll. Prop. 1.) poſt ictum revertetur eadem velocitate qua gaudebat ante impulſum.

Demonſtrata propoſitionis veritate ratione corporis C, vera etiam erit per Prop. I. ratione corporis D. Q. E. D.

Problema.

Datis duorum corporum directe ſibi occurrentium maſſis & velocitatibus: invenire eorundem velocitates poſt ictum.

Sit

Sit maſſa corporis in $A = m$, eius velocitas $AB = p$; maſſa corporis $C = n$, eius velocitas $CB = q$. Mutentur velocitates AB & BC poſt occurſum in alteras $\beta\alpha$, & $\beta\gamma$, ſitque $\beta\alpha = x$, $\beta\gamma = y =$ (per propoſitionem I.) $\frac{\sqrt{mpp+nqq-mxx}}{\sqrt{n}}$. Ponantur iam eadem corpora reverti ad ſecundum impulſum velocitatibus $\delta\beta$ & $\phi\beta$, ita ut ſit $\delta\beta . \phi\beta :: BA . BC$, $\delta\alpha . \phi\gamma :: n . m$, ſeu reciproce ut maſſæ corporum in A & C: reperietur $\delta\alpha = \frac{qnx-pny}{pm-qn}$, & $\phi\gamma = \frac{qmx-pmy}{pm-qn}$. His ita poſitis exprimantur velocitates poſt hunc ſecundum ictum in β per lineas BD & BF, & apparebit per ſecundam partem hypotheſeos tertiæ quod $AB . \beta\alpha :: \delta\beta . DB = \frac{mxx-nxy}{pm-qn}$, & $CB . \beta\gamma :: \phi\beta . BF = \frac{mxy-nyy}{pm-qn}$. Conſideratis porro velocitatibus partialibus $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, patet per hyp. 4 degenerare has in BA & BC, reliquas vero $\delta\alpha$ & $\phi\gamma$ (per prop. 2.) manere easdem, & per conſequens $AD = \delta\alpha$, ſicut & $CF = \gamma\phi$. Elicitur ergo etiam (per primam partem hypotheſeos 3) quod $BD = BA + AD = p + \frac{qnx-pny}{pm-qn}$, & BF $BC + CF = q + \frac{qmx-pmy}{pm-qn}$ unde provenit $\frac{mxx-nxy}{pm-qn} = p + \frac{qnx-pny}{pm-qn}$, & $\frac{mxy-nyy}{pm-qn} = q + \frac{qmx-pmy}{pm-qn}$, quæ duæ æquationes per ſubſtitutionem valoris y ſupra exhibiti ſimilem producunt æquationem. Primam ergo reduxiſſe hic ſufficiat, & prodibit per debitam terminorum diſpoſitionem $mxx - nxy - qnx + pny - ppm + pqn = o$, quæ æquatio diviſa per $x - p$ (radicem manifeſte inutilem dat $mx - ny + mp - qn = o$, vel, ſurrogato pro y valore ſuo, $mmxx + mnxx + 2mmpx - 2mnqx + mmpp - mnpp - 2mnpq = o$, vel tandem dividendo per $x + p$, radicem

 etiam

etiam inutilem, $mmx + mnx + mmp - mnp - 2mnq = 0$, quæ æquatio monſtrat $x = \frac{mnp + 2mnq - mmp}{mm + mn} = \frac{np + 2nq - mp}{m + n}$ $= \frac{2np + 2nq}{m + n} - \frac{np - mp}{m + n} = \frac{2np + 2nq}{m + n} - p$. Q. E. I.

EXAMEN PRINCIPIORVM MECHANICAE, ET DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE DE *COMPOSITIONE ET RESOLVTIONE VIRIVM*,

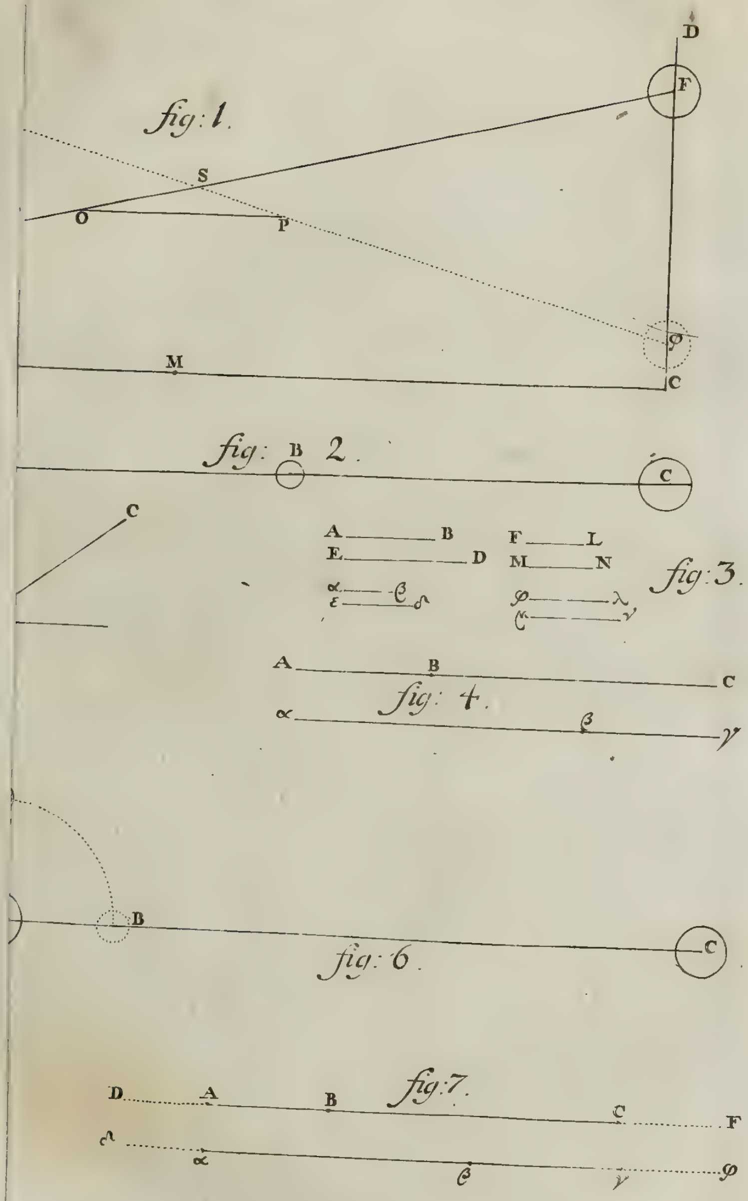
Auct.

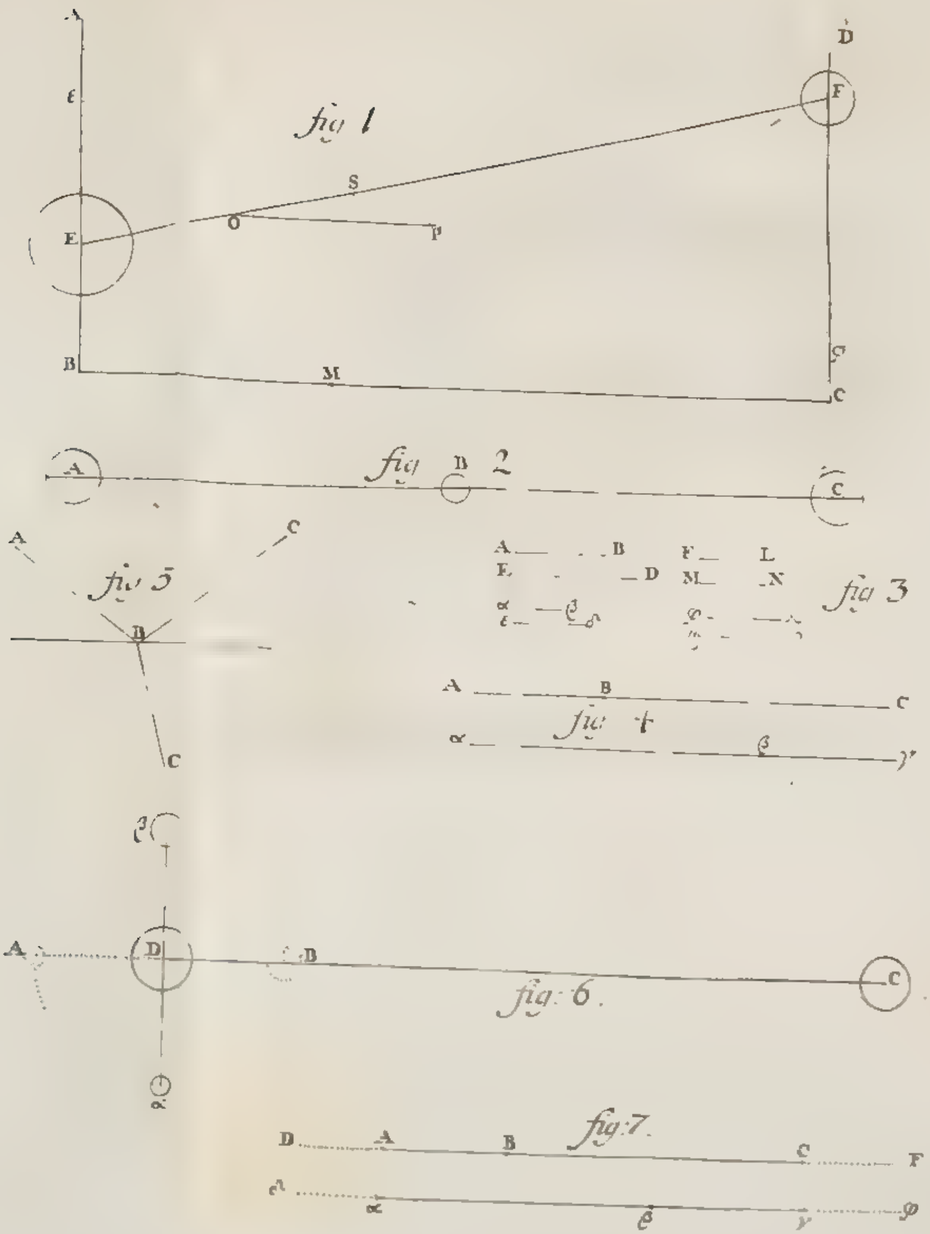
Daniele Bernoulli, Ioh. F.

Sectio Prima.

I.

M. Febr. 1726. ILlam Mechanicæ partem quæ verſatur circa æquilibrium potentiarum, totam ex ſola compoſitione & reſolutione virium deduci poſſe, abunde monſtravit Petrus Varignon; huic dein principio ſi addimus alterum, quod incrementa velocitatum proportionalia ſint elementis temporum ductis in vires ſeu preſſiones


fig: 1.
D
F
S
O
P
φ
M
C
fig: 2.
B
C
C
A B
E D
F L
M N
fig: 3.
A
B
C
fig: 4.
α
β
γ
B
C
fig: 6.
fig: 7.
D
A
B
C
F
α
β
γ
φ


fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig: 6.
fig: 7.

ſiones corpora ad motum ſolicitantes, obtinemus ſecundam mechanicæ partem circa motum corporum occupatam. Poſteriori principio Galileus primum, ni fallor, uſus eſt pro determinando motu corporum uniformiter acceleratorum. Poſſunt quoque exinde deduci regulæ communicationis motuum & alia quam plurima, quæ dein infinitis experimentis egregie fuerunt confirmata; experientia ergo potius, ſi recte iudico, fundatum eſt principium Galileanum, quam ratione, atque proin annumerandum illis veritatibus, quæ dicuntur vulgo *contingenter veræ*, quibus opponuntur *neceſſario veræ*. Potuiſſet enim natura efficere, ut incrementa velocitatum in corporibus motis proportionalia eſſent elementis temporum ductis in functionem quamcunque preſſionum, ita ut dicto tempore t, preſſione p & velocitate v non amplius eſſet $dv = pdt$, ſed verbi gratia $dv = ppdt$ vel $dv = p^3 dt$ &c, quarum æquationum ſingulæ alias atque alias leges motuum ſubminiſtrant.

II. Aliter vero ſe res habet cum principio compoſitionis virium, cui priorem mechanicæ partem, vulgo ſtaticam nominant, inniti dixi; illius enim demonſtrationem inveni plane geometricam, cuius vi demum cognovi, theoremata ſtatica non minus *neceſſario vera* eſſe, quam ſunt geometrica. Hactenus a nemine demonſtrata fuit compoſitio virium, quam ex compoſitione motus, quod demonſtrandi genus tametſi receptum a viris ſummis, veluti Newtono, Varignonio, aliisque: minime tamen rigore geometrico munitum eſt, propoſitionemque non aliter quam *contingenter v ram* reddit, uti inferius demonſtrabo; nequaquam autem dubitandum, quin viri modo allegati ipſi defe-

defectum iſtum optime perſpexerint, maluerint tamen aliqualem, eamque facilem & brevem, quam nullam vel valde prolixam magnoque propoſitionum geometricarum apparatu intricatam demonſtrationem addere; Hæc ut monerem neceſſe duxi, ne quis credat me nil niſi actum agere, imo per longos circuitus rem per ſe obviam petere.

III. Propius iam examinanda res eſt; exponam primo demonſtrationem ordinariam; dein eiusdem defectum indicabo; denique veram demonſtrationem ſubiungam. Demonſtrata hactenus fuit compoſitio virium ex compo-
Fig. 1. ſitione motus, hunc in modum. " *Sint potentiæ.*
" *duæ concurrentes in puncto* A *ſub directionibus* AB &
" AC, *quæque ſe habeant ut* AB & AC. *Si potentia*
" AB *ſola ageret, moveret punctum* A *in linea* AB, *& potentia* AC, *ſi ſola ageret, moveret idem punctum* A *in linea* AC. *Erunt autem velocitates primæ, uti ipſæ potentiæ; ergo ſi primo inſtanti punctum* A *ſolicitatum a potentia* AB *pervenerit in* b, *neceſſe eſt, ut ab altera potentia ſolicitatum perveniat eodem temporis momento in* c,
" *ita ut* Ab. Ac::AB, AC. *Sed qualibet potentia effectum ſuum exerit, ergo movebitur punctum* A *ab ambabus potentiis animatum primo temporis elemento per* Ab *&*
" *per* Ac. *Notum autem eſt ex compoſitione motus iam antiquiſſimis temporibus demonſtrata, punctum ita dupliciter motum eodem tempuſculo abſolvere elementum* Ad
" *quæ eſt diagonalis parallelogrammi* Abdc; *eſt itaque effectus potentiarum* AB, AC *ſimul agentium poſt primum temporis momentum, idem ac ſi una ſola adeſſet potentia, quæ punctum* A *eodem momento per ſpatiolum* Ad
" *movere valeret: Et cum potentiæ ſint ſemper ut velocita-*

tes ſeu ut elementa iisdem tempuſculi deſcripta, erit po- „
tentia illa ad potentiam AB *vel* AC, *ut* Ad *ad* Ab *vel* „
Ac; *id quod indicat potentiam quæſitam* AD *eſſe diago-* „
nalem parallelogrammi ſub lateribus AB, AC, *pariter* „
ac Ad *eſt diagonalis parallelogrammi elementaris* Ab „
dc. *Aequivalet itaque actio ſimplex potentiæ* AD *a-* „
ctioni compoſitæ potentiarum AB, AC. Hæc ſolita „
illa demonſtratio eſt compoſitionis virium, quam meis verbis concepi, ne aliena verba afferendo ſuſpicionem alicuius refutationis in me concitarem: Non impugnabo Geometræ, ſed Geometriæ defectum. Cæterum confido me in allegata demonſtratione nihil omiſiſſe, quod eidem aliquid ponderis ſuperaddere potuiſſet.

IV. Nihil in illa, ut falſum reiicio, ſed quædam ut obſcura, quædam ut non *neceſſario vera*. Præcipuum eſt, quod velocitates initiales ponantur potentiis proportionales, id quod nihil aliud eſt, quam ponere elementa velocitatum proportionalia preſſionibus ſeu potentiis per æqualia tempuſcula agentibus. Sed iam indicavi ſub fine paragraphi 1. potuiſſe eadem elementa aliæ functioni preſſionum eſſe proportionalia: Nemo enim neceſſitatem huius rationis identitatis demonſtravit, nec unquam, ni fallor, demonſtrare poterit. Quod ſi autem incrementa velocitatum iisdem tempuſculis generata ponantur v. gr. radicibus preſſionum ſeu potentiarum proportionalia, alia obtinebitur virium compoſitio a priori longe diverſa nempe talis. Sint duæ potentiæ AB, AC abſcindantur AN, AM radicibus AB, AC proportionales, Dein fiat parallelogrammum ANQM; producatur AQ donec AD ſit quarta proportionalis ad AN^2, AQ^2 & AB, & erit AD potentia æquivalens potentiis *Fig. 2.*

AB & AC ſimul agentibus. Sequitur autem hæc conſtructio ex ratiocinio ſimili illi quod §. 3. expoſitum eſt.

V. Oppoſui hypotheſi communi, qua cæteris paribus incrementa velocitatum proportionalia accipiuntur preſſionibus, aliam quæ certe attentionem præ reliquis meretur. Quid? an abſurdum fuiſſet ante inſtituta experimenta ſuſpicari, naturam hanc ſibi propoſuiſſe legem, ut incrementa vis vivæ dato tempuſculo genita proportionalia ſint preſſionibus; ſed demonſtrabo mox & iam a viris Cel. Hermanno atque Bülffingero demonſtratum eſt, incrementa vis vivæ exprimenda eſſe, ſecundum Leibnitium per vdv; oriretur ergo ex iſta hypotheſi $vdv = pdt$, vel (poſita p conſtanti) $vv = 2pt$, & denique $dv = dt\sqrt{\frac{p}{2t}}$, id eſt, poſitis temporibus æqualibus fierent incrementa velocitatum proportionalia radicibus preſſionum: non itaque ſine fundamento hæc a nobis ficta fuit hypotheſis. Reſtat ut oſtendam elementa vis vivæ exprimenda eſſe per vdv, ſeu quod idem eſt, vim vivam corporis proportionalem eſſe quadratis velocitatum; mihi autem menſura virium vivarum eſt numerus elaſtrorum, quæ corpus tendere poteſt priusquam motum ſuum perdat; hac definitione poſita demonſtrandum erit, corpus velocitate dupla poſſe quatuor elaſtra ſimilia ſimiliterque poſita ad eundem gradum tendere, cum idem corpus velocitate ſimpla unicum tendit: Id primus Pater meus oſtendit, ſed per compoſitionem motus, qui ſcrupulum movere poterat; Ego vero idem demonſtrabo directe, & quidem ex hoc ipſo principio a temporibus Galilei ab omnium nationum Geometris recepto, ſed tamen, uti credo, *contingenter* tantum *vero*, quo nimirum ponitur
Fig. 3. $du = pdt$. En demonſtrationem. Sit elaſtrum, quod

quod comprimi poteſt verſus initium fixum L. Sit curva BEF talis, ut denotante abſciſſa LH longitudinem elaſtri compreſſi, indicet applicata HD potentiam requiſitam ad elaſtrum in illo compreſſionis ſtatu conſervandum. Sint dein quatuor huiusmodi elaſtra *o, o, o, o*, *Fig.* 4. & erit applicata *h d* pro ſimili abſciſſa quadrupla applicatæ in altera curva. Ponatur in figura tertia elaſtrum compreſſum in longitudinem LI, idque ſui iuris factum propellere globum A; inquiram ergo velocitatem globi A, cum elaſtrum acquiſiverit ſtatum LH. Sit LH $= x$, HD $= p$, velocitas globi pro illo momento $= v$, tempus quo elaſtri extremitas pervenit ex I in H $= t$, & erit $dv = pdt = \frac{pdx}{v}$, vel $vdv = pdx$, vel $vv = 2\int pdx$, & $v = V\, 2\int pdx$. Applicetur idem ratiocinium ad figuram quartam, retentis iisdem ſymbolis & ponendo tantum $4p$ loco p, atque ita obtinebitur $v = 2\, V 2\int pdx$; unde liquet velocitates in punctis homologis H & *h* ſemper eſſe ut 1 ad 2, ergo etiam in puncto B velocitas ſubdupla erit velocitatis in puncto *b*, & ſi motus ſit reciprocus, tendet globus A elaſtrum usque in I & ſimilis globus *a* velocitate initiali dupla quatuor elaſtra ſimiliter tendet usque in *i*. Id itaque extra controverſiam poſitum eſſe debet, poſſe corpus quatuor elaſtra ſimilia ſimiliter tendere cum duplici velocitate & quicunque vires vivas hoc ſenſu negat (neminem autem eſſe puto) aut geometra non eſt, aut definitionem impugnat. Sed unum hic obſervandum eſt: nimirum, ſummam omnium preſſionum momentanearum, quas corpus ſuſtinuit dum tenderet quatuor elaſtra non quadruplam ſed duplam fuiſſe, æſtimando ſummam omnium preſſionum momentanearum non ſolum ex ipſis preſſionibus, ſed & ex temporibus quibus ſingulæ applicatæ fue-

 runt

runt, id eſt, ex $\int pdt$; nam tantum agit libra duobus minutis, quantum duæ libræ uno minuto, ſeu tanta eſt ſumma omnium preſſionum momentanearum in priori caſu, quanta in poſteriori; eſt vero $pdt = du$, ergo $\int pdt = v$; unde ſi quis vim corpori moto inſitam definiat ex ſumma omnium preſſionum momentanearum, quas corpus directe ſuſtinere poteſt, priusquam motum ſuum perdat, hic iure illam proportionalem faciet velocitatibus ſimplicibus; Notandum quoque illam preſſionum ſummam eandem eſſe ſemper pro iisdem corporibus iisdemque velocitatibus initialibus modo preſſiones ſumantur directe corporis motui oppoſitæ; habeat enim corpus velocitatem initialem, qua aſcendere poſſit per altitudinem verticalem DN; idem corpus eadem velocitate initiali aſcen-
Fig. 5. dere poterit per curvam DO: dico autem in utroque aſcenſu corpus eandem preſſionum directe oppoſitarum ſummam ſuſtinuiſſe; ductis enim duabus horizontalibus infinite propinquis BM, CN, & verticali BA; erit velocitas in B eadem quæ in M: ſit preſſio in $M = p$, erit preſſio in $B = \frac{BA}{BC} p$; ſit tempus aſcenſus per $MN = dt$, erit tempus aſcenſus per $BC = \frac{BC}{BA} dt$; ergo factum ex tempuſculo in preſſionem in utroque caſu $= pdt$, & aggregatum omnium huiusmodi factorum ſeu ſumma omnium preſſionum in utroque aſcenſu eadem eſt: Et hoc theorema facile mutatur in Leibnitianum, quo aſſeritur corpus idem eadem velocitate initiali ſemper eundem numerum elaſtrulorum æqualium tendere, antequam motum ſuum perdat: Dici non poteſt, quantum principium hoc *conſervationis virium vivarum* utilitatis afferat in rem phyſicam; Nullo enim negotio eius ope ſolvuntur problemata phyſica, alias pro valde difficilibus vel forſan deſpe-

deſperatis habenda. Cæterum has quoque veritates dynamicas non neceſſario veras eſſe patet ex eo, quod deducantur omnes ex principio æquationis *dv=pdt*.

VI. Pergo in examinandis hypotheſibus demonſtrationis pro compoſitione virium: Iam indicavi hypotheſin, quæ mihi vera quidem, ſed tamen talis quæ demonſtrari nequeat videtur. Prouti autem ex unica propoſitione *contingenter vera*, non poteſt aliquid deduci, quod ſit *neceſſario verum*, ita aliam ſimilem hypotheſin in demonſtratione latere neceſſe eſt. Latet autem in eo quod ponatur, potentiam eundem velocitatis gradum communicare dato tempuſculo, corpori moto & corpori quieſcenti; concedam potentias AB, AC ſeorſim agentes motus imprimere puncto A proportionales ipſis potentiis, ſcilicet A*b* & A*c*; quid autem ſi id negem de potentiis ſimul agentibus: nonne fieri potuiſſet, ut potentia alium motum imprimeret corpori iam moto, quam corpori quieſcenti? Certe non ſatis illuſtratur principium hoc ex eo, quod fingi poſſit corpus motum in tubo, dum tubus locum ſuum ſucceſſive mutat. Fingatur enim tubus *CE* motus directione *Cc* non perpendiculari ad tubum, ſintque latera tubi perfecte polita, certum eſt potentiam requiri applicandam in globum *a*, quæ impediat ne globus locum in tubo mutet; ergo potentia tubo applicata non poteſt (ſaltem non debet) conſiderari independenter a potentia globo applicata. Si hiſce diutius immorari vellem, poſſem exemplis demonſtrare, hanc hypotheſin contradictiones involvere, ſi loco *dv=pdt* ponatur v. gr. *dv=ppdt*: Sed ad alia properans hæc relinquam; id adhuc monebo, naturam æ-

Fig. 1.

Fig. 6.

quilibrii equidem ſine errore explicari poſſe, per motum elementarem , id tamen obſcure fieri : ubicunque enim eſt æquilibrium , nullus ſuccedit motus. Sequitur iam pars altera, qua demonſtrationes dabo Geometricas pro compoſitione & reſolutione virium.

Sect. II.

D*Efinitiones*. Per *pot. AB* intelligo potentiam expreſſam per *AB* : potentias ſibi æquivalere dico , quando eadem vi & per eandem directionem punctum trahunt.

Hyp. I. Potentiis quibuscunque poſſunt ſubſtitui earundem æquivalentes. II. Duæ potentiæ conſpirantes æquivalent uni potentiæ ſimplici, quæ eſt æqualis ſummæ illarum, & duæ potentiæ directe oppoſitæ æquivalent uni potentiæ ſimplici , quæ eſt æqualis earundem differentiæ. Hæ duæ poſtremæ hypotheſes nil aliud afferunt, quam totum eſſe æquale partibus & duas potentias æquales & oppoſitas eſſe in æquilibrio, quia nulla ratio, cur una alteri prævaleat, quod axioma metaphyſicum inter neceſſario vera eſt locandum. III. Potentia ſimplex, quæ æquivalet duabus potentiis æqualibus, æqualiter verſus utramque inclinat, id eſt, ipſius directio ſecat bifariam angulum comprehenſum inter directiones duarum potentiarum, id quod ex eodem axiomate metaphyſico ſequitur.

Propoſitio 1. Lemma. Si tres potentiæ DA,
Fig. 7. DB & DC poſitæ ſint in æquilibrio , erunt quoque earum duplæ vel quævis multiplæ, D*m*, D*n* & D*p* in æquilibrio.

De-

Demonſtratio. Si enim ſubſtituamus loco potentiarum D*m*, D*n*, D*p* has alias DA+DA, DB+DB, DC+DC,, in quibus manifeſtum eſt æquilibrium, ilico patet propoſitionis veritas, atque non ſolum de potentiis duplis, ſed & triplis, quadruplis &c. imo quamcunque rationem habentibus cum aſſumtis DA,DB,DC. Q.E.D.

Prop. 2. Problema Quæritur pot. DB æquivalens duabus potentiis DA, DC æqualibus ſibique ad perpendiculum inſiſtentibus. *Fig.* 8.

Solutio. Cum potentiæ DA, DC ſint æquales, nullum eſt dubium circa directionem tertiæ potentiæ; ſecabit utique bifariam angulum ADC; quæritur ergo tantum magnitudo potentiæ DB; vocetur itaque pot. DB, x, nominata pot. DA ſeu DC, a, atque fiat DE = tertiæ continue proportionali ad DB, & DA ſumanturque DG & DH æquales ipſi lineæ DE. Ergo (*per Prop.* 1.) pot. DA æquivalet duabus potentiis DE, DH, atque DC duabus aliis DG, DH. Subſtituendo itaque loco potentiarum DA, DC, has alias DE, DH, DG, DH, oportet ut hæ quatuor potentiæ ſimul agentes æquivaleant potentiæ DB; ſed potentiæ DE, DG ſe deſtruunt, reſtant adeoque pot. DH, DH ſeu ſimplex pot. 2 DH = DB; ſeu $\frac{2aa}{x} = x = a\sqrt{2}$.

Coroll. Ergo pot. DB exprimitur per diagonalem quadrati, cuius latera repræſentant potentias DA, DC.

Prop. 3. Probl. Quæritur potentia DB æquivalens duabus potentiis DA, DC ad ſe invicem perpendicularibus ſed quomodocunque inæqualibus. *Fig.* 9.

Solutio. Sit DA $= a$, DC $= b$; DB $= x$; ducatur per punctum D recta EG perpendicularis ad DB; ſumatur DR $= \frac{aa}{x}$ id eſt, = tertiæ continue proportionali

ad

ad DB & DA; & DE fiat $=\frac{ab}{x}=$ quartæ proportionali ad DB, DC & DA. His ita poſitis patet potentiam DA æquivalere potentiis DR, DE; quia DR, DA, DE per conſtructionem proportionales ſunt ipſis DA, DB, DC; ſunt præterea ſimiliter poſitæ tres priores cum tribus poſterioribus ob ang. EDA = ang. CDB. Subſtitui ergo potentiæ DA poſſunt duæ æquivalentes DE, DR: Idem etiam fiat ab altera parte ſubſtituendo potentiæ DC duas alias æquivalentes DN, DG tales, ut DC, DB, DA ſint proportionales ipſis DN, DC, DG; & ſic quatuor potentiæ DE, DR, DN, DG æquivalebunt potentiæ DB; eſt autem DN $=\frac{bb}{x}$, & DG $=\frac{ab}{x}$; ergo pot. DG & DE ſe deſtruentibus reſtant potentiæ DR, DN æquandæ cum potentia DB; unde $\frac{aa}{x}+\frac{bb}{x}=x=\sqrt{aa+bb}$,

Coroll. 1. Eſt ergo potentia DB æqualis illi, quæ repræſentaretur per diagonalem rectanguli, cuius latera exprimunt potentias propoſitas.

Coroll. 2. Conſtat adeoque de valore ſeu quantitate potentiæ DB, verum nihil adhucdum conſtat de ipſius directione; quod ſi vero demonſtrari inſuper poſſet, non poſſe potentiam DB æquivalere potentiis lateralibus ſeu illas agendo in oppoſitam partem in æquilibrio continere, niſi agat ſecundum diagonalem rectanguli modo definiti, facillimum demonſtratu eſſet, potentias quaſcunque DA, DC quomodocunque ad ſe inclinatas eſſe æquipollentes cum potentia ſimplici DS, quæ eſt diagonalis parallelogrammi DASC. Si enim ſubſtituas potentiæ DA duas DP, DF ad ſe invicem perpendiculares, habebis loco potentiarum DA, DC tres alias DP, DF, DC ſeu (facta SL perpendiculari ad DC productam)

Fig. 10.

ductam) duas potentias DP, DL æquivalentes potentiæ DS; eſt autem DS etiam diagonalis in parallelogrammo obliquangulo DASC; ergo potentia æquivalens potentiis DA, DC repræſentatur per diagonalem DS.

Propoſitio 4. Probl. Poſito potentias BA, BC inter ſe æquales æquivalere potentiæ BE angulum ABC ſecanti bifariam; invenire duas alias potentias inter ſe æquales BD, BF eidem potentiæ BE æquivalentes, & quarum directiones angulos ABE, CBE biſecent. *Fig.* 11.

Sol. Sit pot. BA ſeu BC$=a$, pot. BE$=b$, pot. BD vel BF$=x$; fiat, ut BE (b). BD vel BF (x) :: BD vel BF (x). BQ vel BR$=\frac{xx}{b}$. ſumatur BS$=$BQ: Erunt potentiæ BD & BF æquivalentes cum potentiis BQ, BS & BR, BS, ſeu potentiis BQ, BR, & 2BS. Præterea, ſi faciamus BT talem, ut ſit $=$ quartæ proportionali ad BA, BE, & BQ, erunt potentiæ BQ, BR æquipollentes potentiæ BT$=\frac{xx}{a}$. Ergo poſita pro potentiis BQ, BR alia BT, habebitur tandem BT$+$2BS$=$BE ſeu $\frac{xx}{a}+\frac{2xx}{b}=b$ & $x=b\sqrt{\left(\frac{a}{2a+b}\right)}$ Q. E. I.

Prop. 5. Theorema. Si in triangulo ABC rectangulo atque isosceli ducatur BR perpendicularis ad AC, poſteaque anguli ABR, CBR biſecentur lineis BD, BF ut & anguli DBR, FBR lineis Bd, Bf & ſic in infinitum biſecando ſemper angulos circa diagonalem. Dico, duas potentias ſimul agentes BD, BF, vel Bd, Bf &c. æqualiter ad BR inclinatas ſemper æquivalere potentiæ ſimplici 2BR. *Fig.* 12.

Demonſtratio; Potentiæ BA, BC æquipollent potentiæ 2BR (per Coroll. prop. 2); quærendo nunc per præcedentem propoſitionem potentias BD, BF eidem

S po-

potentiæ 2BR æquipollentes, reperietur (nominando BA, *a*) BD ſeu BF $=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; ſi autem geometrice quæratur valor ipſius BD, invenitur BD $=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; unde ſequitur, lineas BD & BF repræſentare potentias æquipollentes potentiæ 2BR. Faciendo nunc BD $=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $=b$ iterumque inquirendo in potentias B*d*, B*f* æquivalentes potentiæ 2BR $=a\sqrt{2}$, invenitur B*d* ſeu B*f* (prop. 4.) $=\frac{a\sqrt{2b}}{\sqrt{2b+a\sqrt{2}}}$, quæ quantitas ſi ponatur $=c$ invenitur ulterius progrediendo pot. Bδ $=$ Bϕ $=\frac{a\sqrt{2c}}{\sqrt{2c+a\sqrt{2}}}$, & ſic deinceps; ſed ſi B*d*, Bδ &c. ſeu B*f*, Bϕ &c. geometrice quærantur, non aliter illæ exprimentur, quod probat, ſingula paria potentiarum BD, BF, ſeu B*d*, B*f* ſeu Bδ, Bϕ &c. æquipollentia pot. 2BR repræſentari per ipſas lineas BD, B*d*, Bδ &c. & BF, B*f*, Bϕ &c. terminatas nimirum a linea recta AC. Q. E. D.

Aliter. Quicunque fuerit angulus ABR ſive CBR, ſi potentiæ BA, BC æquivaleant potentiæ 2BR, fluit ex præcedenti propoſitione, potentias alias applicatas ad angulos dimidios prioribusque æquipollentes repræſentari per lineas BD, BF. Conſiderando itaque rurſus loco anguli ABR ſeu CBR angulum DBR ſeu FBR iterum manifeſtum fit, potentias B*d*, B*f* æquivalere prioribus BD, BF, & ſic de reliquis; ergo cum potentiæ BA, BC æquivaleant pot. 2BR, ſi ſint ad ſe invicem perpendiculares (per prop. 2.), eidem quoque æquivalebunt omnes reliquæ BD, BF, & B*d*, B*f*, & Bδ Bϕ &c. Q. E. D.

Coroll. Demonſtrata ergo fuit compoſitio virium

in

in omnibus caſibus, ubi potentiæ repræſentantur per latera rhombi, cuius angulus æqualis uni ex hac ſerie geometrica 1R, $\frac{1}{2}$R, $\frac{1}{4}$R, $\frac{1}{8}$R, &c. per R intelligo angulum rectum.

Prop. 6. Theorema; ſi duæ potentiæ æquales BA, BC æquipolleant potentiæ BF, quam pono biſecari in puncto L a linea AC; ſique per punctum B ducatur perpendicularis DE, cui quoque perpendiculariter inſiſtunt AD, CE, dico potentiam BA æquivalere potentiis BL, BD, atque pot. BC potentiis BL, BE. *Fig.* 13.

Demonſtratio. Si neges potentiam BA æquivalere potentiis BL, BD; fac illam æquivalere duabus aliis, veluti Bl, Bd; ergo pari ratione pot. BC æquivaleret potentiis Bl, Be=Bd; ergo potentiæ Bd, Bl, Be, Bl. æquivalerent pot. BF, ſeu pot. 2BL. quod eſt abſurdum. Ergo alterutra potentiarum, in quas reſolvi debet potentia BA, neceſſario exprimi debet per BL, quo demonſtrato, immediate fluit ex prop. 3. alteram potentiam ſumendam eſſe æqualem potentiæ BD, quia nimirum BA $=\sqrt{(BL^2+BD^2)}$: eodem modo fit demonſtratio ab altera parte. Q. E. D.

Corol. Notæ nunc quoque ſunt directiones potentiarum compoſitarum in infinitis rectangulis, nimirum in omnibus illis, quæ ſunt circumſcripta lineis BA, BD &c. & quorum alterum latus eſt BR. *Fig.* 12.

Prop. 7. Probl. Si BA, BE atque BC, BD ſint latera qualiumcunque rhomborum ſupra definitorum, invenire potentiam in diagonali, quæ æquivaleat potentiis BF, BG; ponendo lineas BF, BG biſecare angulos ABC, EBD. *Fig* 14.

Solutio. Producantur lineæ BC, BD donec fiant

æquales ipſis BA, BE; iunctisque punctis M & N, producatur BL in S. Ergo potentiis BM, BN æquipollet potentia 2BS (per prop. 1.) & ſi quatuor potentiæ BA, BE, BM, BN, ſimul agere concipiantur, omnes ſimul æquipollere manifeſtum eſt potentiis 2BL, 2BS. Nunc videamus, quid ſingulatim valeant potentiæ BA, BM inquirendo nimirum potentiam BU illis æquivalentem; quia vero BA=BM biſecabit BU angulum ABM, adeo ut BU congruat cum BF: Reſolvatur potentia BA in potentias BP & BL (per coroll. prop. 6) atque potentia BM in potentias BO, BS & ſic habebimus quatuor potentias BP, BO, BL, BS, ergo (per prop. 3.) BU= $\sqrt{(BP+BO)^2+(BL+BS)^2}$; eodem modo reperitur ab altera parte BW $=\sqrt{(BR+BQ)^2+(BL+BS.)^2}$ Cum vero potentiæ BU, BW æquipolleant potentiis BA, BM & BE, BN ſeu potentiis 2BL+2BS, manifeſtum eſt, nihil ſupereſſe pro plenaria problematis ſolutione, niſi ut fiat ſequens analogia: *ut* BU ſeu BW *ad* 2BL+2BS *ita* BF ſeu BG *ad* potentiam quæſitam in diagonali æquivalentem potentiis BF, BC. Hæc nunc, ut effectui demus, ſit BA=BE=a; BC=BD=b; AC=ED=c; erit CL=DL $=\frac{aa-bb-cc}{2c}$; MS=BO $=\frac{a^3-abb-acc}{2bc}$; BP =AL $=\frac{aa-bb+cc}{2c}$; BL $=\frac{\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc-a^4-b^4-c^4}}{2c}$ BS $=\frac{a\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc-a^4-b^4-c^4}}{2bc}$; ergo BU=BW= $\sqrt{(BP+BO)^2+(BL+S)^2}$ =radici ſequentis quantitatis

tis $\frac{aa+2ab+bb}{4bbcc}\times(2bbcc+2aabb+2aacc-a^4-b^4-c^4)$ $+\left(\frac{aab-b^3+bcc+a^3-abb-acc}{2bc}\right)^2$; eſt autem radix totius huius quantitatis $=\frac{\sqrt{(a^3b+ab^3+2aabb-abcc)}}{b}$. Inventa BU exprimenda reſtat ipſa BF, ut quarta proportionalis ad BU, 2BL+2BS & BF haberi poſſit. Illa vero commode obtinetur faciendo angulum BFZ=ang. BAF; ita enim fit triangulum BAF ſimile triangulo BFZ, nec nec non triang. BFC ſimile triang. FZC, ex quorum triangulorum ſimilitudinibus ſtatim provenit BF= $\frac{\sqrt{a^3b+ab^3+2aabb-abcc}}{a+b}$. Eſt itaque quarta proportionalis ad BU, 2BL+2BS & BF, hæc quantitas $\frac{\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc-a^4-b^4-c^4}}{c}=2$ BL. Q.E.I.

Coroll Quia potentiæ BF, BG æquivalent potentiæ 2BL, patet illas æquivalentes eſſe cum potentiis lateralibus BA, BE vel BC, BD. *Fig.* 15.

Propoſitio 8. Theorema. Si duæ vires ſint æquales, veluti BA, BC erit illarum actio ſemper æqualis potentiæ expreſſæ per diagonalem rhombi ſive potentiæ 2BR.

Demonſt. Si BD, BE ſint latera quadrati, erunt potentiæ BD, BE æquipollentes potentiæ 2BR (per prop. 2.) & ſi BS, BT biſecent angulos DBR, EBR, pariter potentiæ BS, BT æquivalebunt pot. 2BR (per prop. 4.) & biſectis rurſus ſingulis angulis, erunt iterum potentiæ expreſſæ per novas lineas ſecantes terminatas a linea DE, ſumtæ binæ æquipollentes potentiæ 2BR (per coroll. prop. 7.) Ergo cum detur progreſſio in infinitum liquet, non poſſe duas potentias exhiberi æquales intra terminos BD, BE concurrentes in B atque terminatas a linea DE, quæ

 non

non æquivaleant potentiæ 2BR. Duplicatis vero angulis inter BR & quamcunque BS ſeu BT, propoſitio quoque manifeſta fit de illis potentiis, quæ transgrediuntur terminos BD, BE. Sicque tota demonſtratio abſoluta eſt.

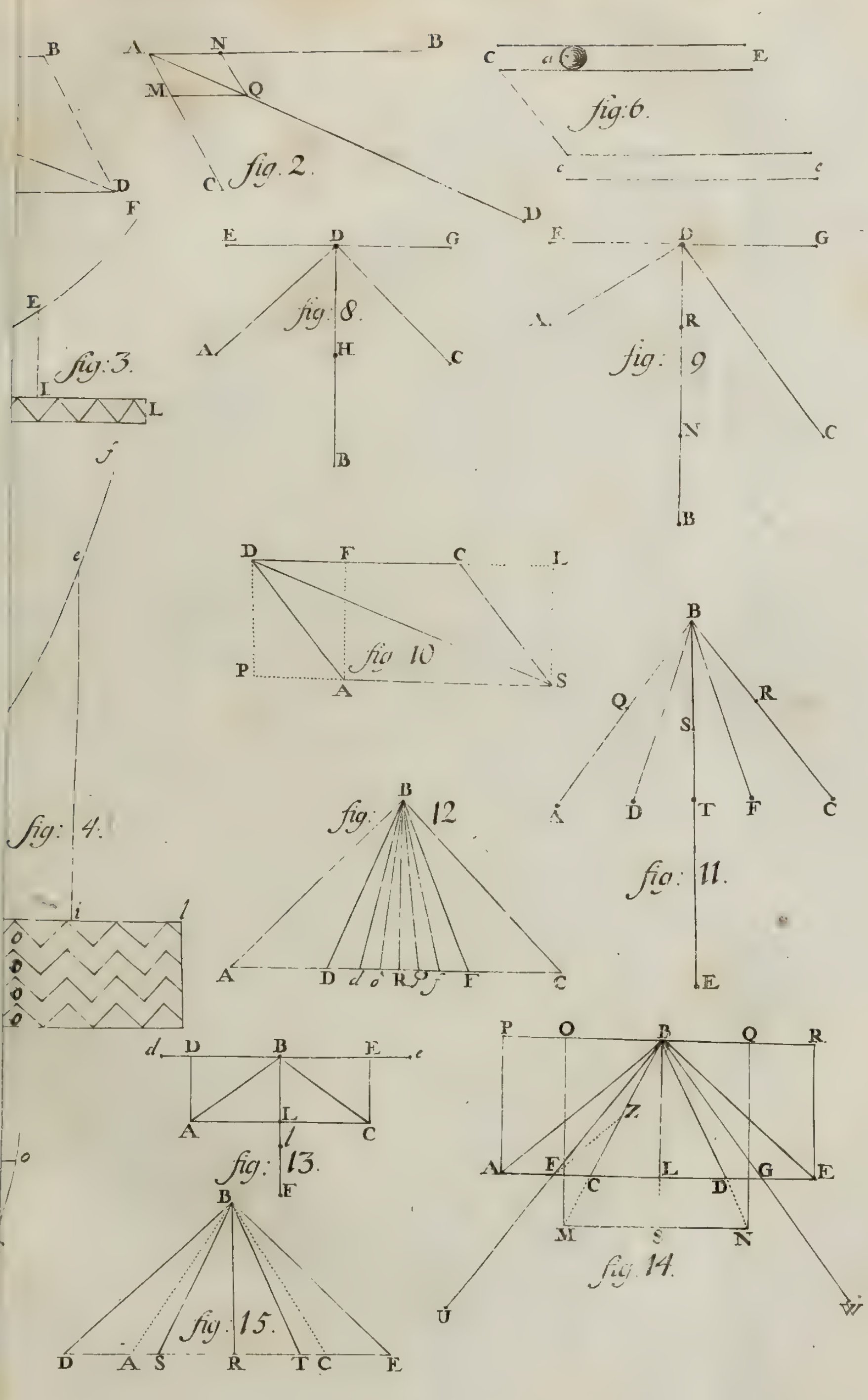
Schol. Demonſtrata compoſitione virium pro omnibus rhombis, valebit eadem pro omnibus rectangulis (per prop. 6.) atque pro omnibus parallelogrammis, per coroll. 2. prop. 3.

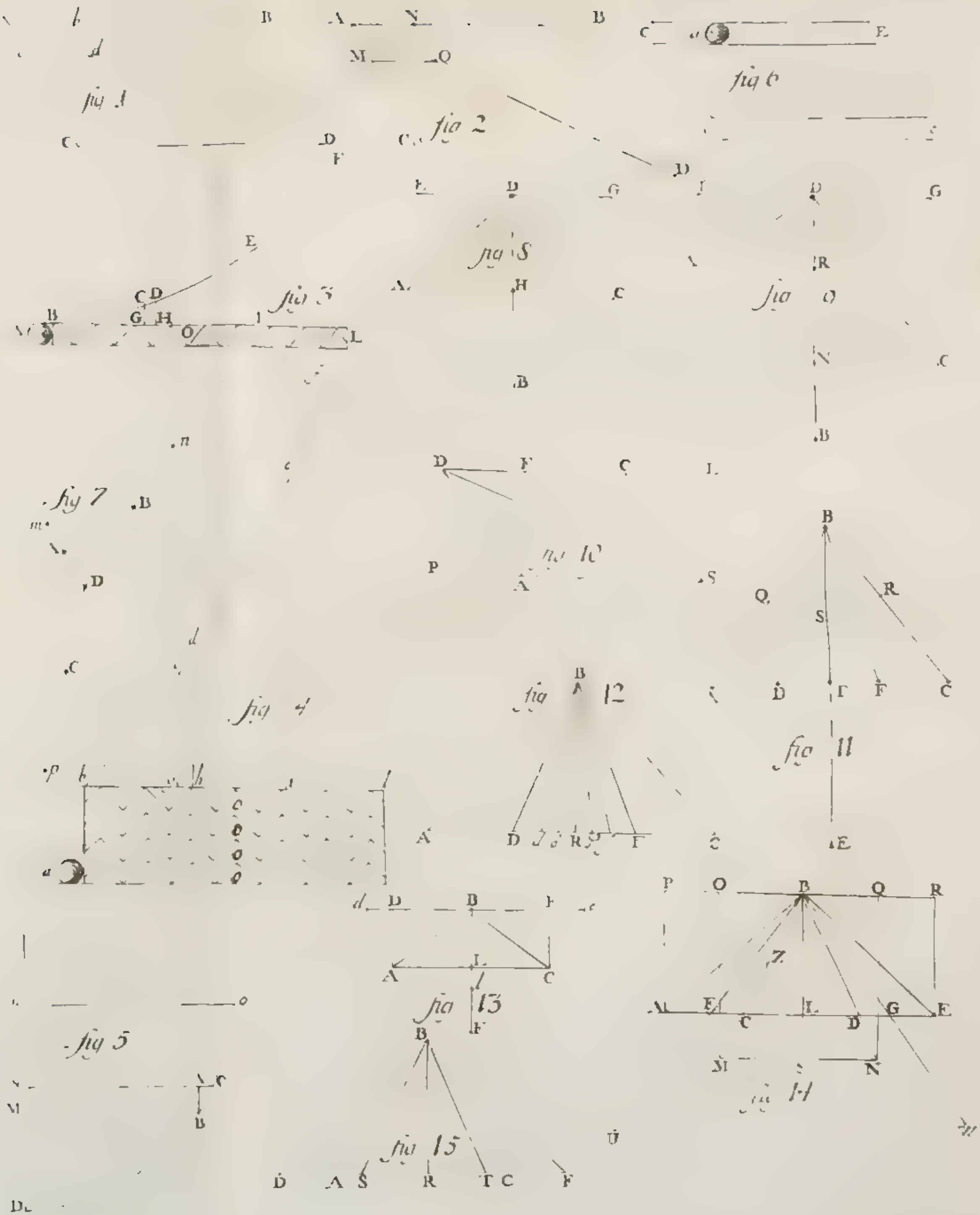
Geminus Modus directus *DIVIDENDI SEMICIRCVLVM* in data ratione: Quibus Keplerianum Problema *DE INVENIENDIS PLANETARVM LOCIS* ad datum quodvis tempus, *Solutum exhibetur.*

Auctore

Iac. Hermanno.

25. *Febr.* 1726. IOhannes *Keplerus* primus quod ſciam docuit planetarum ſemitam ellipticam eſſe, & hos planetas ipſos in ſua quemque orbita ita circumferri, ut areas verrant tempori motionis proportionales. Pulchra hæc reperta ex Tychonicis obſervationibus eruta calcu-


fig. 2.
fig:6.
fig:3.
fig: 8.
fig: 9
fig: 4.
fig 10
fig: 11.
fig: 12
fig: 13.
fig. 14.
fig. 15.


fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig 6
fig 7
fig 8
fig 10
fig 11
fig 12
fig 13
fig 14
fig 15

lo ſagaci induſtria poſito & ſubducto, recentioribusque obſervationibus apprime conſentanea, Aſtronomiæ plane novam induxerunt faciem. In hac vero difficile ſeſe offerebat problema ſolvendum, ad cuius ſolutionem nulla via Keplero patebat directa, quamque proinde per regulam quam vocant *falſi* tentare coactus erat. Keplerus ad finem Partis IV. Commentarii in Stellam Martis fol. 300, problema his verbis enuntiat. *Data area partis Semicirculi, datoque puncto diametri invenire arcum, & angulum ad illud punctum: cuius anguli cruribus, & quo arcu, data area comprehenditur.* Vel, *Aream ſemicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione ſecare*: Subiungens: mihi ſufficit credere, ſolvi a priori non poſſe propter arcus & ſinus ἑτερογένειαν. Erranti mihi, quicunque viam monſtraverit, is erit mihi magnus Apollonius.

2. Primus, quantum mihi conſtat, qui magni Apollonii laudem mereri conatus eſt, fuit *Chriſtophorus Wrennus*, qui reapſe viam directam inivit & problema ope Cycloidis protractæ conſtruxit; *Walliſius* enim conſtructionem eius ad calcem tractatus de Cycloide prodidit, an vero eam potiſſimum viam, qualem *Keplerus* ſibi monſtrari optavit, prefferit, de eo valde dubito. Ipſe enim Cel. *Newtonus* qui eandem fere conſtructionem Prob. 31. Lib. 1. *Princip. Ph. Nat.* repetiit, faſſus eſt, propter difficilem curvæ huius deſcriptionem, præſtare ſolutionem adhibere vero proximam, qualem per ſeriem quandam angulorum convergentem exhibuit, neſcio tamen, an ſatis expeditam. Illuſtrem Geometram, ut in aliis, ita & hic imitati ſunt *David Gregorius* & *Ioh Keill* uterque enim problema Keplerianum per ſeriem infinitam ſolutum dedit, hic in Lectionibus Aſtronomicis, ille

vero

vero in Elementis Aſtronomiæ Geometricis. Citra ſcrierum uſum vero eidem problemati ſolvendo incubuerunt Duumviri de Aſtronomia præclare meriti *Phil. de la Hire*, atque *Iacobus Caſſinus*, & ſolutiones ſuas in Commentariis Academiæ Reg. 1710 & 1719 ediderunt. Alia comparuit in Tomo VI. Supplementorum ad acta Eruditorum Lipſienſia, Autore *Petro Horrebow*.

3. Supervacaneum forte videbitur, quod poſteaquam hoc problema tot inſignibus autoribus ſolutum eſt, id denuo in ſcenam producere audeam. Audebo tamen, nec hoc faciens actum agere exiſtimo, cum diverſi unum idemq; problema ſolvendi modi utilitate ſua non deſtituantur. Geminum habeo, alterummere geometricum, alterum vero arithmeticum calculoque aſtronomico magis accomodum. Problema quod præ manibus habemus eſt eiusmodi.

Dividere Semicirculum AQD *per lineam* BE *ita*, *ut trilineum* ABE *ſit ad ſemicirculum* AQD, *in data ratione* DN *ad* DH=AD.

Conſtructio. Semicirculo DGH alteri AQD æquali inſcribatur quadratrix DLGH talis indolis, ut ex quolibet eius puncto L ductis LK parallela diametro DH, & LM eidem perpendiculari, ſit ubique arcus reſpondens huius diviſionis, nempe DK, ad abſciſſam DM, ut DKG ad radium DI. Sumatur dein in radio CQ ſurſum producto & diametro perpendiculari, CP=quadranti AQ, & iungatur PE, ex puncto vero N agatur NL alteri EP parallela, quadratrici alicubi occurrens in L, ex quo puncto deinceps ducta LB diametro AD parallela, occurret ſemicirculo AQD in optato puncto B, iungendo enim BE, triangulum ABE erit ad ſemicirculum AQD in data ratione DN ad DH. De-

Demonſtratio. Nam ex natura lineæ DLG ſit AB (DK) : AQ (DG) :: DM : AC (DI), adeoque AQ×DM = AB×AC = 2 Sect. ABC. Propter parallelas PE & LN, triangula PCE & LMN ſimilia ſunt, & præbent CP (conſtr. AQ) : CE :: LM (BF) : MN, quare AQ×MN = CE×BF = 2△CEB, & addendo AQ×DM + AQ×MN = 2 Sect. ABC + 2△CBE = 2 trilin. ABE, quare AQ×DN = 2 trilin. ABE; & 2 Semic. AQDA = AQ×AD vel = AQ×DH; quare Trilineum ABE : Semicirc. AQDA (:: AQ×DN : AQ×DH) :: DN : DH. Quod erat &c.

Curva DLG eſt quidem transcendens, cum ſit ſpecies lineæ *Sinuum*, eo tamen rectius ad conſtructionem adhibetur, quanto facilius Cycloide protracta per puncta deſcribi poteſt. Per continuam enim biſectionem quadrantis DKG eiusque partium, tot curvæ puncta & tam propinqua inveniri poſſunt, quot quis voluerit, ducendo tantum per ſingulas diviſiones quadrantis lineas diametro parallelas & per ſimiles diviſiones radii DI lineas eidem diametro perpendiculares, occurſus harum perpendicularium diametro, & illarum parallelarum, ſuppeditant totidem curvæ puncta.

Dixi curvam DLG ſpeciem eſſe lineæ *Sinuum*: nam LM eſt ſinus arcus DK & DM huic arcui proportionalis, quare abſciſſæ DM arcus, & ordinatæ LM ſinus eorum repræſentant, & hanc ob rationem curva DLG eſt *linea ſinuum.*

Hæc curva, quæ aliis Quadratrix Tschirnhauſiana vocatur, quod mentio eius occurrat in *Tschirnhauſii* Medicina Mentis, ubi aliquot eiusdem proprietates recenſentur; hæc linea, inquam, egregium uſum habet in con-

ſtructionibus illorum problematum, quæ ab arcubus circularibus pendent, quod hæc ipſa conſtructio problematis Kepleriani probat.

Data conſtructio quoque arithmeticam problematis ſolutionem ſubminiſtrat. Nam vocando arcum $AB = a$, radium $AC = r$, ſinum arcus $BF = s$, quadrantem ABQ $= q$, & tandem $DN = b$, ac $CE = e$, propter curvam DLG fiet $DM = \frac{ar}{q}$, triangula vero ſimilia CPE, & MLN, præbent $MN = \frac{es}{q}$; quare cum ſit $DM + MN = b$, fiet $\frac{ar + es}{q} = b$; vel $ar + es = bq$.

Iam vero per ea, quæ *Ill. Leibnitius* in Actis Erudit. 1693 pag. 179 ex calculo differentiali, & ego occaſione problematis angularis per communem geometriam, in Actis 1703 pag. 351 elicuimus, eſt $s = a - \frac{a^3}{6rr} + \frac{a^5}{120r^4} - \frac{a^7}{5040r^6} +$ &c. quare ſurrogando hanc ſinus æſtimationem in ſupra inventa æquatione $ar + es = bq$, habebimus $(r + e)a - \frac{a^3 e}{6rr} + \frac{a^5 e}{120r^4} - \frac{a^7 e}{5040r^6} +$ &c. $= bq$.

Si iam in hac ſerie omnes termini, excepto primo, evaneſcere intelligantur, reſultabit $(e + r)a = bq$, hoc eſt analogia AE : DN :: AQ : AB, quæ analogia iam commodam præbet approximationem arcus AB.

Sin vero duo, tres, vel plures ex primis ſeriei terminis aſſumantur, orientur æquationes trium, quinque, ſeptem, &c. dimenſionum, quæ quidem uſui Aſtronomico non videntur idoneæ. Quare progredior ad modum arithmeticum ſolvendi hoc idem problema.

5. In ſecunda figura, exprimat arcus AM anomaliam

liam mediam, ſitque CE eccentricitas, & iungatur ME ductaque ex centro C ſemicirculi linea CN parallela ipſi EM, ducatur EN: dico angulum AEN eſſe anomaliam coæquatam quam proxime: accuratius vero invenietur hæc anomalia; ſi iam arcus NM vocetur a & radius AC $= r$, fiatque $x = \frac{aa}{6rr} - \frac{a^4}{120r^4} + \frac{a^6}{5040r^6}$ — &c. & angulus NEB $= NC^2 \times ax : BE^2$; Angulus AEB erit anomalia coæquata

Nam trilineum NEB fiet = ſegmento circuli inter arcum NM & eius ſubtenſam contento, quare cum triangula NEC & NMC ſuper eadem baſi NC & inter easdem parallelas NC, ME conſtituta æqualia ſint, erit Sector AMC = trilineo ABE; atqui Sector AMC: Semicirc. AMDA :: AM : AMD; ergo etiam ANBE: Semic. AMDA :: AM: AMD. Hoc eſt in data ratione. Quod erat &c.

Quod ad angulum BEN attinet, invenietur is ex eo, quod ſegmentum circuli inter arcum MN eiusque chordam MN æquari debeat ſectori BEN. Iam ſegmentum illud æquat ſemiſſem facti ex differentia arcus MN eiusque ſinus in radium CN. Verum cum arcus MN (*hyp*) ſit a, eiusque ſinus $= a - \frac{a^3}{6rr} + \frac{a^5}{120r^4} - \frac{a^7}{5040r^6} +$ &c.

erit arcus MN — ſinu eius $= \frac{a^3}{6rr} - \frac{a^5}{120r^4} + \frac{a^7}{5040r^6}$

&c. (hoc eſt propter $x = \frac{aa}{6rr} - \frac{a^4}{120r^4} + \frac{a^6}{5040r^6}$ — &c.)

$= ax$. Sector vero BEN æquat ſemiſſem rectanguli ex NE in Bb, demiſſa ex B in EN perpendiculari; Sector

 enim

enim ob parvitatem anguli BEN inſtar trianguli rectilinei ſpectari poteſt, & perpendiculum B*b* inſtar arculi centro E radio EB deſcripti. Quum autem ſegmentum NM æquare debeat ſectorem BEN, erit EN × B*b*=*ax* in CN; adeoque arculus B*b*=CN × *ax* : EN. Eſt vero ut EB ad arculum B*b*, ita radius CN ad angulum BEN= CN^2 × *ax* : EB× EN, vel quia EN & EB iam inſtar æqualium tractari poſſunt, erit ideo angulus BEN = CN^2 × *ax*: EB^2; ut ponebatur.

Exempl. Sit cum *Keillio* CE=0. 01691, exiſtente AC=1, quæritur anomalia coæquata AEB, ſi anomalia media AM= 30°. Quare angulus ACM = 30°, & in Δ^{lo}. MCE invenietur angulus MEA = NCA = 29°31′. 38″=arcui AN; quare NM=28′. 22″. In triangulo vero NCE, invenitur angulus NEA=29°. 3′. 7″, & hæc eſt anomalia coæquata; nam angulus NEB non æquabit 4 minuta quinta, adeoque attendi non meretur.

Tandem dicatur, ut ſinus totus ad ſinum anguli PCE (erecta nempe in E normali ad AD) ita tangens anguli inventi AEN vel AEB ad anomaliam coæquatam in Ellipſi. Cl. Keil per ſuam ſeriem invenit angulum AEN, qualem hoc loco abſque ullo uſu ſeriei per ſolam reſolutionem binorum triangulorum MCE & NCE, aſſecuti ſumus, uſus enim præcedentis ſeriei mihi tantum monſtravit, quantus debeat eſſe angulus NEB addendus iam invento NEA? cum vero is ſubducto calculo ne quidem ad 4 minuta quinta accedere inveniatur, merito contemnitur.

DE

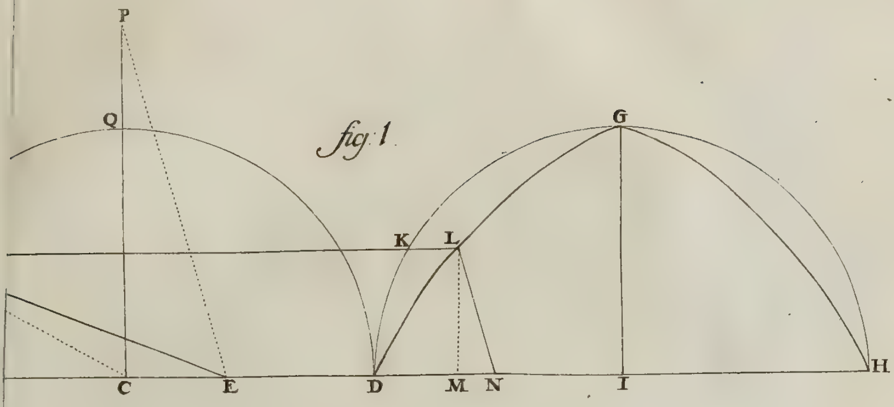


fig: 1.

fig: 2.

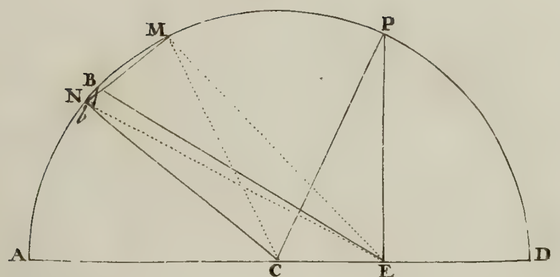


fig 1

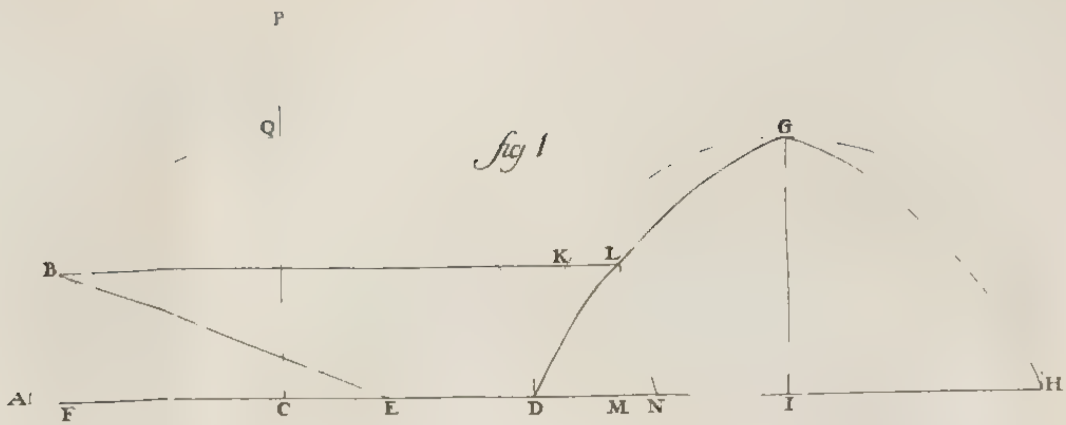
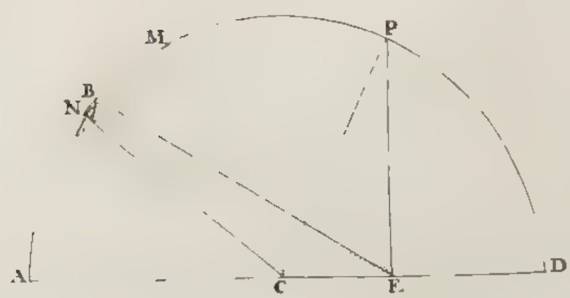


fig 2



DE CALCULO INTEGRALI.

Auctore
Iacobo Hermanno.

CAlculus Integralis inverſus eſt Differentialis: nam modum docet, quo ex propoſita quantitate infiniteſimali, altera quantitas finita, cuius differentiatione orta eſt illa, elici debet, quoties hoc fieri poteſt. Nam non omnis quantitas differentialis integralem algebraicam habet, ſed ſæpiſſime transcendentem, quæ per quadraturas tantum curvarum exhiberi poteſt, per artificia hactenus cognita. Itaque genuina methodus calculi integralis media ſuppeditare debet, quibus certo cognoſci poſſit: an differentialis aliqua propoſita integrabilis ſit, an vero ſecus; &, ſi primum obtinet, quænam ſit eius ſumma algebraica; ſin vero talem non habeat, qualis ſit figura ſimpliciſſima earum, quarum areæ exhibent integralem quæſitam, idque non ſolum tum, cum data quantitas differentialis unicam indeterminatam cum conſtantibus involvit, ſed tunc quoque, cum duas aut plures indeterminatas cum ſuis differentialibus complectitur. An vero methodus, quam hoc loco communicabo, ea, quæ requiri dixi, præſtet, atque hanc ob cauſam generalis vocari mereatur, intelligentium iudicio & æquitati id omne diiudicandum relinquo. *M. Mai. 1726.*

PRÆNOTANDA.

1. Æquationes integrandas ſic generaliter deinceps

exprimam. 1°. per $du = R^\lambda dK$, 2°. $du = R^\lambda S^\mu dK$. 3° $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$, &c. & ſic infinitum. In quibus R, S, T, &c. denotant quantitates una, duabus, aut pluribus indeterminatis ut libet compoſitas; elementum vero dK non modo easdem indeterminatas, quas quantitates R, S, T, &c. continent, involvere poteſt, ſed etiam plures, aut ſubinde etiam ſecunda differentialia. Litteræ græcæ λ, μ, ν exponentes indefinitas quantitatum R, S, T, deſignant, caſibus particularibus deinceps definiendas.

2. Logarithmos quantitatum quarumlibet per litteram l quantitatibus illis præfixam, uſitato more, poſthac ſignificabo, niſi aliquando expreſſe monendum ſit alio ſenſu hanc litteram l adhiberi. Itaque lx, ly, lx^m ſignificant logarithmos quantitatum x, y, & x^m. &c.

3. Per litteram vero $\int$ quantitatibus differentialibus præpoſitam intelligi volo ſummam ſeu integrale quantitatis, cui eadem littera eſt præfixa. Adeoque $\int R^\lambda dK$ denotat integralem vel ſummam elementi $R^\lambda dK$.

Lemma 1.

Integrale fractionis cuiusque $\frac{adx}{x}$, *cuius numerator eſt multiplum* a *elementi denominatoris, eſt logarithmus denominatoris* x *ad poteſtatem* a *evecti. Hoc eſt* $\int \frac{adx}{x} = lx^a$.

Lemma 2.

Quantitas abſoluta, quæ competit ſeriei cuilibet logarithmorum ſignis + *vel* − *quomodocunque connexorum, eſt factum ſingularum quantitatum ſingulis logarithmis reſpondentium exponente affirmativa vel negativa affectarum, prout logarithmi earum ſigno affirmativo vel negativo præditi fuerint.*

Quan-

Quantitas abſoluta ſeriei $lx + ly - lz$ eſt $x^1 y^1 z^{-1}$, hoc eſt $\frac{xy}{z}$. Et quantitas abſoluta huius $alR + lM$ eſt $R^a M$.

Ambo hæc lemmata notiora ſunt, quam ut demonſtratione, cuilibet in hiſce vel leviter tantum verſato facilime invenienda, egeant, ſed tanquam fundamenta ſequentibus erant præmittenda.

Theorema 1.

Integralis æquationis $du = R^\lambda dK$, *eſt* $u = MR^{\lambda+1}$, *in qua* M *datur per æquationem hanc* $dK = (\lambda+1) M dR + R dM$.

Hanc æquationem differentialem in ſequentibus *Canonicam* vocabo, quia revera regulam ſuppeditat ſecundum quam æſtimatio litteræ M tuto inveniri poteſt.

Dem. Differentiando æquationem $u = MR^{\lambda+1}$, fit $du = (\lambda+1) MR^\lambda dR + R^{\lambda+1} dM = [(\lambda+1) M dR + R dM] R^\lambda$ vel propter *(hyp)* $dK = (\lambda+1) M dR + R dM$, habetur $du = R^\lambda dK$. Q. E. D.

Theorema 2.

Integralis æquationis $du = R^\lambda S^\mu dK$, *eſt* $u = MR^{\lambda+1} S^{\mu+1}$, *& æquatio* Canonica $dK = (\lambda+1) MS dR + (\mu+1) MR dS + RS dM$.

Dem Aequatio $u = MR^{\lambda+1} S^{\mu+1}$ differentiata præbet $du = [(\lambda+1) MS dR + (\mu+1) MR dS + RS dM)] R^\lambda S^\mu$, hoc eſt propter $dK = (\lambda+1) MS dR + (\mu+1) MR dS + RS dM$, fit $du = R^\lambda S^\mu dK$. Q. E. D.

Theorema 3.

Aequatio $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$, *integralem habet* $u = R^{\lambda+1} S^{\mu+1} T^{\nu+1} M$, *cuius æquatio* Canonica *eſt* $dK = (\lambda+1) MST dR + (\mu+1) MRT dS + (\nu+1) MRS dT + RST dM$.

De-

Demonſtratio huius eadem eſt ac præcedentium: & ſimilis eſt proceſſus in infinitum.

Scholium generale.

In applicatione horum theorematum ad exempla particularia tota difficultas in eo ſita eſt, ut ex æquatione Canonica eliciatur æſtimatio indeterminatæ *M*. Id autem hoc modo fit: Seligo in elemento dR aliquod membrum, in quo plures dimenſiones reſpectu indeterminatarum inſunt, quam in reliquis membris, & cum hoc membro omnia membra elementi dK divido, cum quibus hæc diviſio ſuccedit, nullaque habita ratione coefficientium & ſignorum, quantitatibus per diviſionem ortis præpono coefficientes indefinitas A, B, C, D, &c. & reſultabit inde per additionem omnium, quantitas aliqua, quam voco Z, ponique poſtea debet $M = Z + N$, ſurrogando enim hanc æſtimationem indeterminatæ *M* in æquatione canonica & conferendo terminos æquationis reſultantis cum homologis terminis elementi dK, definientur æſtimationes litterarum aſſumtitiarum A, B, C, D.

Quod de elemento dR dictum eſt, ſimiliter intelligendum eſt de factis SdR, STdR, &c. Hæc vero omnia exemplis multo magis illuſtrabuntur, quam prolixioribus præceptis.

Si fuerit ſimpliciter $dK = o$, aſſumi poteſt quælibet quantitas R^λ, vel $R^\lambda\ S^\mu$ &c. prout hoc vel illud commodum videbitur, eſt enim etiam $R^\lambda dK$, vel $R^\lambda S^\mu dK$, &c. $= o$. & $\int R^\lambda dK$ vel $\int R^\lambda S^\mu dK$, &c. æquabitur quantitati conſtanti. Sed veniendum ad exempla particularia.

Exemplum I.

Sit ergo $du = ax^m dx$, quæritur, quid ſit *u* ſeu $\int ax^m dx$.

Si

Si theorema I ad hoc exemplum applicemus, fient $dK=adx$, $R=x$ & $\lambda=m$, & æquatio canonica $adx=(m+1)Mdx+xdM$. Quia iam in $dR=dx$, eſt unicum membrum dx, cum hoc divido $dK=adx$, oritur in quotiente a, quantitas conſtans, huius nulla habita ratione pono A, eritque adeo $Z=A$, & $M(=Z+N)=A+N$ quo valore in æquatione canonica $adx=(m+1)Mdx+xdM$ ſurrogato, oritur $adx=(m+1)Adx+(m+1)Ndx+xdN$. Comparatio terminorum homologorum præbet $A=a:(m+1.)$ Et $\overline{m+1}\,Ndx+xdN=o$, quare poni poſſunt N & $dN=o$. Etenim ſi huius $m+1Ndx+xdN=o$, rationem habere velimus, reducetur ea per diviſionem ad $\frac{(m+1)dx}{x}+\frac{dN}{N}=o$, & integrando per *lemma* I, $lx^{m+1}+lN=lb$, ubi b eſt conſtans, & abiectis log-mis, fiet per *lemma* 2, $Nx^{m+1}=b$, & $N=bx^{-m-1}$. Quare fiet $M=\frac{a}{m+1}+bx^{-m-1}$, & integrale quæſitum $u=Mx^{m+1}=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+b$. Q. E. I.

Scio probe hoc exemplum nimis obvium & tritum eſſe, quam ut hoc circuitu opus fuiſſet, ſed ut methodum illuſtrarem, hæc minutim exponenda eſſe duxi.

Notandum quoque, quod, quoties poſt peractam ſubſtitutionem quantitatis Z+N in locum indeterminatæ M, eiusque elementi in locum elementi huius in æquatione canonica, & poſt comparationem terminorum homologorum, ſic omnia evaneſcant, ut aliud nihil, quam æquatio $-NdR+RdN=o$ remaneat, toties poni poſſint N & $dN=o$.

Exemplum 2.

Sint $dK=mx^{m-1}ydx-nx^{m}dy$, $R=y$, item $\lambda=$

 $-n$

$-n-1$. adeoque $du=R^{\lambda}dK$. invenire $u=\int R^{\lambda}dK$.

In hoc exemplo æquatio canonica fit $mx^{m-1}ydx-nx^{m}dy=-nMdy+ydM$. Hoc loco iterum dR unico membro dy conſtat, quare divido æſtimationem ipſius dK per hoc elementum dy: in quantitate vero $dK=mx^{m-1}ydx-nx^{m}dy$ unicum membrum ineſt $-nx^{m}dy$, cum quo hæc diviſio ſuccedat, prodeunte quoto $-nx^{m}$, quare per monitum 1 Scholii generalis, nulla habita ratione ſigni $-$ & coefficientis n, ſcribo Ax^{m} pro Z, fietque M $(=Z+N)=Ax^{m}+N$, & $dM=mAx^{m-1}dx+dN$. Quibus in æquatione canonica ſurrogatis, oritur $mx^{m-1}ydx-nx^{m}dy=mAx^{m-1}ydx-nAx^{m}dy-nNdy+ydN$, iam vero facta $A=1$, & deſtructis deſtruendis, manebit tantum $-nNdy+ydN=o$, quare citra omnem ſcrupulum, pono iuxta monitum ad exempl. 1. datum, $N=o$, & $dN=o$; eritque adeo $M=x^{m}$, & $u=R^{\lambda+1}M=x^{m}y^{-n}=x^{m}:y^{n}$.

Exempl. 3.

Sit $du=x^{3}dx:\sqrt{(aa-xx)}$, invenire $u=\int x^{3}dx:\sqrt{(aa-xx)}$.

In hoc exemplo fit $dK=x^{3}dx$, $R=aa-xx$, & $\lambda=-\frac{1}{2}$, quare æquatio canonica pro hoc exemplo, invenietur eſſe $x^{3}dx=-Mxdx+(aa-xx)dM$. Eſt iam iterum in dR unicum membrum $-2xdx$, cum quo divido $dK=x^{3}dx$, provenit $-\frac{1}{2}xx$. Quare neglecta coefficiente $-\frac{1}{2}$, ſcribo $Z=Axx$, & $M(=Z+N)=Axx+N$, & $dM=2Axdx+dN$; quibus in æquatione canonica ſuffectis, prodit $x^{3}dx=-3Ax^{3}dx+2aaAxdx-Nxdx+(aa-xx)dN$. Quare poſita $1=-3A$, id eſt $A=-\frac{1}{3}$, remanebit deſtructis deſtruendis, hæc altera $-\frac{2}{3}aaxdx-Nxdx+(aa-xx)\,dN=o$, vel $\frac{2}{3}\,aaxdx=-$

$=-Nxdx+(aa-xx)dN$. Tractetur hæc remanens æquatio, inſtar præcedentis æquationis canonicæ; hoc eſt, dividatur $\frac{2}{3}aaxdx$ per xdx, quia ineſt æquationi membrum $-Nxdx$, in quo æſtimatio litteræ N quæritur, proveniet in quotiente quantitas conſtans $\frac{2}{3}aa$, quare pono $N=B+O$. & $dN=dO$, quibus in æquatione ſuffectis naſcetur $\frac{2}{3}aaxdx=-Bxdx-Oxdx+(aa-xx)dO$, quare facta $B=-\frac{2}{3}aa$, remanebit æquatio $-Oxdx+(aa-xx)dO=o$, quare O & dO nihilo æqualia ponenda, adeo ut ſit $N=B=-\frac{2}{3}aa$; hinc derivatur $M(=Z+N)=Axx+B=-\frac{1}{3}xx-\frac{2}{3}aa$. Adeoque $u(=MR^{\lambda+1})=-[(xx+2aa)\sqrt{(aa-xx)}]:3$.

Exemplum 4.

Sit generalius $du=x^{nm-1}dx(a+bx^m)^p$

Habemus ergo $dK=x^{nm-1}dx$, $R=a+bx^m$ & $\lambda=p$, & æquatio generalis Canonica nunc mutabitur in $x^{nm-1}dx=(p+1)bm\,Mx^{m-1}dx+(a+bx^m)dM$, & quia in quantitate $(p+1)bmMx^{m-1}dx$ ineſt $x^{m-1}dx$, dividatur *quantitas* $x^{nm-1}dx$ per $x^{m-1}dx$, *quotiens* reperietur x^{nm-m}, quare facio $M=Ax^{nm-m}+N$, & $dM=nm-m\,Ax^{nm-m-1}dx+dN$ quibus in æquat. canonica ſuffectis habetur $x^{nm-1}dx=(p+n)bmAx^{nm-1}dx+(nm-m)aAx^{nm-m-1}dx+(p+1)bmNx^{m-1}dx+(a+bx^m)dN$. Quare facta $A=\frac{1}{(p+n)bm}$, fiet $(m-nm)aAx^{nm-m-1}dx=(p+1)bmNx^{m-1}dx+(a+bx^m)dN$.

Fiat $N=Bx^{nm-2m}+O$, & $dN=(nm-2m)Bx^{nm-2m-1}dx+dO$, quibus in æquatione canonica ſecunda, quæ ſucceſſit in locum primæ, ſurrogatis, reſultat $(m-nm)aAx^{nm-m-1}dx=(p+n-1)bmBx^{nm-m-1}dx+(nm-2m)aBx^{nm-2m-1}dx+(p+1)bmOx^{m-1}dx+$

 $(a+$

$(a+bx^m)\,dO$. Quare exiſtente $B=(m-nm)\,aA:(p+n-1)bm$ invenietur tertia æquatio canonica $(2m-nm)\,aBx^{nm-2m-1}dx=(p+1)bmOx^{m-1}dx+(a+bx^m)\,dO$.

Ponatur tertio $O=Cx^{nm-3m}+P$, & $dO=(nm-3m)\,Cx^{nm-3m-1}dx+dP$. Quare tertia æquatio canonica mutabitur in
$(2m-nm)\,aBx^{nm-2m-1}dx=(p+n-2)\,bmCx^{nm-2m-1}dx+(nm-3m)aCx^{nm-3m-1}dx+(p+1)\,bmCPx^{m-1}dx+(a+bx^m)\,dP$. Idcirco facta $C=(2m-nm)aB:(p+n-2)bm$, invenietur quarta $(3m-nm)aCx^{nm-3m-1}dx=(p+1)bmPx^{m-1}dx+(a+bx^m)dP$.

Simili progreſſu pervenietur tandem ad æquationem aliquam canonicam $(em-nm)\,a\Delta x^{nm-em-1}dx=(p+1)bm\,Zx^{m-1}dx+(a+bx^m)dZ$. In hac vero eſt e, terminus quicunque ſeriei numerorum naturalium 1, 2, 3, &c. Δ eſt terminus ſeriei coefficientum A, B, C, D cuius ordinem indicat numerus integer $e+1$. Ac denique Z eſt terminus ſeriei indeterminatarum M, N, O, P &c. cuius idem ordo eſt $e+1$. Sit $R=a+bx^m$, & ultima hæc æquatio canonica mutabitur in æquationem $(em-nm)\,a\Delta x^{nm-em-1}dx=(p+1)ZdR+RdZ$, ducatur hæc in R^p, fietque $(em-nm)a\Delta x^{nm-em-1}dx(a+bx^m)^p=(p+1)R^pZdR+R^{p+1}dZ$, & integrando $R^{p+1}Z=\int(em-mn)\,a\Delta x^{nm-em-1}dx(a+bx^m)^p$ dicatur hoc $=Y$, eritque adeo $Z=Y:R^{p+1}$. Expanſis iam omnibus fiet
$M=Ax^{nm-m}+Bx^{nm-2m}+Cx^{nm-3m}+$ &c... $\Delta x^{nm-em}+YR^{-p-1}$ quare $u(=MR^{p+1})=(Ax^{nm-m}+Bx^{nm-2m}+Cx^{nm-3m}+$ &c $+\Delta x^{nm-em})(a+bx^m)^{p+1}+Y$

ubi ſunt

A=1

$A = 1 : (p+n)bm$
$B = (m-nm)aA : (p+n-1)bm = (1-n)aA : (p+n-1)b$
$C = (2m-mn)aB : (p+n-2)bm = (2-n)aB : (p+n-2)b$
&c. &c.
$\Delta = (em-m-mn)a\Gamma : (p+n-e+1)bm = (e-n-1) \times$
$a\Gamma : (p+n-e+1)b$

ubi Γ eſt coefficiens, quæ ultimam Δ præcedit. Formula igitur gemino caſu integrabilis fiet

1°. Si n ſit quilibet numerus integer affirmativus, ſeu $n = e$, tunc enim fiet $Y = o$, adeoque $u = (Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + \&c. + \Delta).(a+bx^m)^{p+1}$

2°. Si $-n-p = e$ ſeu cuilibet integro affirmativo æqualis, fiet enim hoc caſu $u = (Ax^{mn+mp+m} + Bx^{mn+mp+2m} + \&c. + \Delta).(b+ax^{-m})^{p+1}$
in qua ſunt $A = -1 : mna$. $B = (1+p+n)bA : -(n+1)a$
$C = (2+p+n)bB : -(n+2)a$, &c.

Huius rei ratio eſt, quia $du = x^{mn-1}dx(a+bx^m)^p$ mutari poteſt in hanc quoque $du = x^{nm+pm-1}dx(b+ax^{-m})^p$. Sed hic poſterior integrabilitatis caſus tantum obtinet, cum p eſt integer negativus, & n integer.

Nam, quia $du = x^{qr-1}dx(b+ax^q)^p$ eiusdem formæ eſt cum hac $du = x^{mn-1}dx(a+bx^m)^p$, ea integrabilis erit per caſum priorem, ſi r fuerit numerus integer affirmativus; iam ſi in æquatione $du = x^{mn+mp-1}dx(b+ax^{-m})^p$ ponantur $m = -q$, & $n+p = -r$, mutabitur hæc æquatio in $du = x^{qr-1}dx(b+ax^q)^p$, quæ proinde integrabilis fiet, cum $r = -n-p$ æquat numerum quemcunque integrum affirmativum, hoc autem fieri nequit, niſi n fuerit numerus integer, & p quoque, ſed negativus.

3°. Item æquatio $du = x^{hm}dx(a+bx^m)^p$ integrabilis fiet, ſi p fuerit $= -e-h-\frac{1}{m}$ exiſtente e numero integro. Nam $x^{hm}dx(a+bx^m)^p = x^{hm+pm}dx(b+ax^{-m})^p$,

 qua

quare ponendo $m=-q$, & $p=-e-h+\frac{1}{q}$, mutabitur $x^{hm+pm}dx(b+ax^{-m})^p$ in $x^{eq-1}dx:(b+ax^q)^{e+h-\frac{1}{q}}$, quæ per caſum primum algebraice integrabilis eſt. In hoc caſu numerus h non eſt neceſſario integer, poteſt enim eſſe fractus quicunque

4°. Si in formula $du=x^{nm-1}dx(a+bx^m)^p$, ſit $n=h+\frac{1+l}{m}$, mutabitur in ſequentem $du=x^{hm+l}dx(a+bx^m)^p$, cuius integralis erit

$u=(Ax^{nm-m}+Bx^{nm-2m}+\text{\&c.}+\Delta x^{nm-em})(a+bx^m)^{p+1}+\Upsilon$

Iam ſi h fuerit cuilibet numero integro affirmativo e æqualis, fiet $em-nm=-l-1$, & $nm-em-1=l$, adeoque $\Upsilon=-(l+1)\int a\Delta x^l dx(a+bx^m)^p$. adeoque integrale eſt

$u=(Ax^{hm-m+l+1}+Bx^{hm-2m+l+1}+\text{\&c.}+\Delta x^{l+1})(a+bx^m)^{p+1}-(l+1)\int\Delta ax^l dx(a+bx^m)^p$. Verum $\int x^l dx(a+bx^m)^p=\int(ax^l+bx^{m+l})dx(a+bx^m)^{p-1}=\int(aax^l dx+2abx^{m+l}dx+bbx^{2m+l})dx(a+bx^m)^{p-2}=\int(a^3x^l dx+3aabx^{m+l}+3abbx^{2m+l}dx+b^3x^{3m+l})\times dx(a+bx^m)^{p-3}$ atque ita porro: unde ſi p fuerit integer affirmativus, mutabitur $\int x^l dx(a+bx^m)^p$ in $\int a^{p-1}x^l dx+(p-1)a^{p-2}bx^{m+l}dx+\frac{p-1.p-2}{2}a^{p-3}bbx^{2m+l}dx+\text{\&c.})\times(a+bx^m)$ quod integrale vero per præcedentia dependet a ſerie quantitatum abſolute integrabilium $+Q\int x^l dx(a+bx^m)$ ubi Q eſt quantitas conſtans ex actuali evolutione formulæ oriunda.

Sed quid eveniet, ſi p ſit numerus integer, ſed negativus? Hæc formula $du=x^l dx(a+bx^m)^{-p}$ etiam transformari poteſt in

$du=(Ex^l+Fx^{m+l}+Gx^{2m+l}+\text{\&c.})dx:(a+bx^m)$ cuius integralis dependet iterum a ſerie quantitatum abſolute

inte-

integrabilium $+Q\int x^{l}dx : a+bx^{m}$.

Hac ergo ratione huic unico exemplo incluſa ſunt ſingula ſeptem theoremata, quæ in Actis Erudit. 1719. ſine demonſtratione publicata ſunt pag. 269. & theorema octavum inde etiam derivari poteſt. Scio quidem demonſtrationes horum theorematum iam exhibitas fuiſſe tum a *Bülſingero* noſtro, tum etiam a *Nicolao Bernoulli* V V. C C. *pag.* 467. *ſq. Act. Erud.* 1720; non inconſultum tamen duxi theorema noſtrum generale ad hæc ipſa applicare.

Exemplum 5.

Sit $du = 3kdz - lzzdz : zz\sqrt{(kz - lz^3 + mz^4)} = -lz^{-\frac{1}{2}}dz + 3kz^{-\frac{5}{2}}dz : \sqrt{(mz^3 - lzz + k)}$ adeoque $dK = -lz^{-\frac{1}{2}}dz + 3kz^{-\frac{5}{2}}dz$, $R = mz^3 - lzz + k$, & $\lambda = -\frac{1}{2}$; quare æquatio canonica nunc eſt $dK = \frac{1}{2}MdR + RdM$. Eſt vero $dR = 3mzzdz - 2lzdz$, dividatur ergo ſecundum monitum primum Scholii generalis membrum $-lz^{-\frac{1}{2}}dz$ quantitatis dK per membrum $-2lzdz$ quantitatis dR, orietur in quotiene neglectis ſigno & coefficiente $z^{-\frac{3}{2}}$, quare pono $M = Az^{-\frac{3}{2}} + N$, & $dM = -\frac{3}{2}Az^{-\frac{5}{2}}dz + dN$, quibus in canonica ſurrogatis, prodit $-lz^{-\frac{1}{2}}dz + 3kz^{-\frac{5}{2}}dz = \frac{1}{2}lAz^{-\frac{1}{2}}dz - \frac{3}{2}kAz^{-\frac{5}{2}}dz + \frac{1}{2}NdR + RdN$. Quare poſita $A = -2$, æquatio hæc deſtructis deſtruendis præbebit $\frac{1}{2}NdR + RdN = o$. Propterea per monitum ad exempl. primum, fient N & $dN = o$, atque adeo $M = -2z^{-\frac{3}{2}}$ adeo-

deoque $u(=MR^{\lambda+1})=-2R^{\frac{1}{2}}z^{-\frac{3}{2}}=-2\surd(mz^3-lzz+k):\surd z^3$.

Exemplum 6.

Sit $du=(z^5dz+z^4dz-8z^3dz):(z^5+z^4-5z^3+8z-4)$, id eſt $=(z^5dz+z^4dz-8z^3dz):(z-1)^3.(z+2)^2$. Iam cum in denominatore ſint duo factores $(z-1)^3$ & $(z+2)^2$, adhibendum eſt Theorema ſecundum, in quo iam $dK=z^5dz+z^4dz-8z^3dz$, $R=z-1$, & $S=z+2$, item $\lambda=-3$ & $\mu=-2$, itaque nunc fiet æquatio canonica $dK=-2MSdR-MRdS+RSdM$, id eſt, $z^5dz+z^4dz-8z^3dz=-(3zdz+3dz)M+(zz+z-2)dM$. Quare faciendo $M=Az^4+Bz^3+Czz$, & $dM=4Az^3dz+3Bzzdz+2Czdz$, & ſubſtitutis hiſce in æquatione canonica, fiet $z^5dz+z^4dz-8z^3dz=Az^5dz+Az^4dz-(8A+C)z^3dz-(6B+C)zzdz-4Czdz$.

Comparationes terminorum homologorum præbent $A=1$, $B=o$, & $C=o$, quare habebimus $M=z^4$. Adeoque $u(=MR^{\lambda+1}S^{\mu+1})=(z-1)^{-2}.(z+2)^{-1}z^4=z^4:z^3-3z+2$.

Exemplum 7.

Sit $du=(3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-qqx^3dx-6qx^4dx):(qq-xx)\sqrt[3]{(q^3+qqx-qxx-x^3)}$. Iam, quia $\sqrt[3]{(q^3+qqx-qxx-x^3)}=(q+x)^{\frac{2}{3}}.(q-x)^{\frac{1}{3}}$; fiet $du=(3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-qqx^3dx-6qx^4dx):(q+x)^{\frac{5}{3}}.(q-x)^{\frac{4}{3}}$. Quare nunc habemus $dK=3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-$ &c. $R=q+x$, $S=q-x$, $\lambda=-\frac{5}{3}$ $\mu=-\frac{4}{3}$, & æquationem canonicam $dK=-\frac{2}{3}MSdR$

$-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}\mathrm{MR}dS+\mathrm{RS}d\mathrm{M}$. Hoc eſt $3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-qqx^3dx-6qx^4dx = (-\frac{1}{3}qdx+xdx)\,\mathrm{M}+(qq-xx)\,d\mathrm{M}$. Quare ſi fiat $\mathrm{M}=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}xx+\mathrm{D}x^3$ æquatio canonica mutabitur in

$$\begin{array}{l} 3q^5dx-q^4xdx+9q^3xxdx-qqx^3dx-6qx^4dx \\ =-\frac{1}{3}q\mathrm{A}dx+\mathrm{A}xdx-\frac{1}{3}q\mathrm{C}xxdx-\mathrm{C}x^3dx-2\mathrm{D}x^4dx. \\ \;\;+qq\mathrm{B}\quad\;\; -\frac{1}{3}q\mathrm{B}\;\; +3qq\mathrm{D}\quad -\frac{1}{3}q\mathrm{D} \\ \qquad\qquad +2qq\mathrm{C} \end{array}$$

Ex collatione terminorum homologorum eliciuntur æſtimationes coefficientum, quales ſequuntur. $\mathrm{D}=3q$, $\mathrm{C}=o$, $\mathrm{B}=3q^3$ & $\mathrm{A}=o$. Quare invenitur

$$u=(3q^3x+3qx^3) : \sqrt[3]{}(q^3+qqx-qxx-x^3).$$

Exempla proxime antecedentia 5, 6, & 7um. mutuo ſumſi ex *Newtoni* tractatu de *Quadraturis*, quibus Celeberr. Auctor ſeriem ſuam Theoremate III. pro quadraturis exhibitam, illuſtravit. Sed quid vetat, quominus hanc ſeriem ipſam ex primo noſtro theoremate derivemus? Eſt ergo

Exemplum 8.

Sint $\mathrm{R}=e+fz^q+gz^{2q}+hz^{3q}+$ &c. dein $\mathrm{Z}=a+bz^q+cz^{2q}+dz^{3q}+$ &c. & $du=\mathrm{R}^{l-1}\mathrm{Z}z^{m-1}dz$. Invenire integralem huius formulæ.

Eſt itaque $d\mathrm{K}=\mathrm{Z}z^{m-1}dz$, $\lambda=l-1$, & per theor. 1. æquatio canonica $\mathrm{Z}z^{m-1}dz=l\mathrm{M}d\mathrm{R}+\mathrm{R}d\mathrm{M}$. Ponamus iuxta præcedentia $\mathrm{M}=\mathrm{A}z^m+\mathrm{B}z^{m+q}+\mathrm{C}z^{m+2q}+\mathrm{D}z^{m+3q}+$&c.$+\mathrm{N}$, eritque

$$\begin{array}{lllll} \mathrm{R}d\mathrm{M}= & me\mathrm{A}z^{m-1}dz & +(m+q).e\mathrm{B}z^{m+q-1}dz & +(m+2q)\,e\mathrm{C}z^{m+2q-1}dz & +\text{\&c.}\,\mathrm{R}d\mathrm{N} \\ & & +mf\mathrm{A} & +(m+q).f\mathrm{B} & \\ & & & +\;\; m.g\mathrm{A} & \\ l\mathrm{M}d\mathrm{R}= & & +flq\mathrm{A}z^{m+q-1}dz & +2glq\mathrm{A}z^{m+2q-1}dz & +\text{\&c.}+l\mathrm{N}d\mathrm{R} \\ & & & +flq\mathrm{B} & \end{array}$$

Ergo æquatio canonica mutatur in ſequentem:

$$az^{m-1}dz + bz^{m+q-1}dz + cz^{m+2q-1}dz + \&c. =$$
$$meAz^{m-1}dz + (lq+m)fAz^{m+q-1}dz + (2lq+m)gAz^{m+2q-1}dz + lNdR + RdN.$$
$$\qquad + (m+q)eB \qquad\qquad + (lq+m+q)fB$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + (m+2q)eC$$

Iam comparatio terminorum homologorum præbet:

$$A = \{a \; - - - - - - - - - - - - \} : (m+0q)e$$
$$B = \{+b-(lq+m)fA \; - - - - - - - - \} : (m+q)e$$
$$C = \{+c-(2lq+m)gA-(lq+m+q)fB \; - - - - \} : (m+2q)e$$
$$D = \{d-(3lq+m)hA-(2lq+m+q)gB-(lq+l+2q)fC- \} : (m+3q)e$$

Hæ determinationes cum *Newtonianis* ad amuſſim conſentiunt.

Verum, quia in ultima æquatione canonica ſemper aliqua membra remanent, quorum ratio eſt habenda, adeoque vocabimus hæc membra $Gz^{m+4q-1}dz + Hz^{m+5q-1}dz + Iz^{m+6q-1}dz$, eritque ultima æquatio canonica $-Gz^{m+4q-1}dz - Hz^{m+5q-1}dz - Iz^{m+6q-1}dz = lNdR + RdN$. Ex hac vero elicitur $-\int(Gz^{m+4q-1}dz + Hz^{m+5q-1}dz + Iz^{m+6q-1}dz)R^{l-1}) = NR^l$, quare vocando $dY = Gz^{m+4q-1}dz + Hz^{m+5q-1}dz + Iz^{m+6q-1}dz$, habebimus $N = -YR^{-l}$, adeoque $M = (A + Bz^q + Cz^{2q} + Dz^{3q})Z^m - YR^{-l}$, quare integrale quæſitum erit $u = (A + Bz^q + Cz^{2q} + Dz^{3q} + \&c.) Z^m R^l - Y$

Ubi quidem ſunt

$$G = (3lq+m+q)hB + (2lq+m+2q)gC + (lq+m+3q)fD.$$
$$H = (3lq+m+2q)hC + (2lq+m+3q)gD$$
$$I = (3lq+m+3q)hD.$$

In caſu, quo ſeries R finitur termino, cuius coefficiens eſt

eſt h. In aliis caſibus omnibus æſtimationes litterarum G, H, I, &c. facili negotio obtinebuntur.

Si ſeries $A+Bz^q+Cz^{2q}+Dz^{3q}+$ &c. alicubi abrumpens eſt, Y fiet $=o$, adeoque formula abſolute integrabilis erit.

Non abſimili modo ex theoremate noſtro ſecundo derivare licet Theorema IV. *Newtoni* Propoſitione VI^ta^ *Tract. de Quadraturis* exhibitum, ſed quia hæc deductio prolixiorem depoſcit calculum, ab ea nunc abſtinebo.

Pergam ergo ad illuſtrationem theorematum noſtrorum per exempla quantitatum differentialium, duas aut plures indeterminatas varie inter ſe mixtas, vel ſubinde ſecunda differentialia involventium, qualia non mihi ipſi ad arbitrium finxi, ſed ab amico mihi ſine integralibus ſuppeditata vel aliunde deſumta ſunt. Ad talia enim perinde ſeſe extendit ac ad ea, quæ in ſuperioribus tractavi. Cuius rei leve ſpecimen exemplo ſecundo ſuperiori iam exhibui.

Exemplum 9.

Sit $du=3a^3yydy-6aaxxydy+3ax^4dy-6aaxyydx+12ax^3ydx-6x^5dx$.

Hæc æquatio æquivalet alteri $du=(3a^3x^{-5}yydy-6aax^{-3}ydy+3ax^{-1}dy-6aax^{-4}yydx+12ax^{-2}ydx-6dx)x^5$. Quo caſu fit $dK=3a^3x^{-5}yydy-6aax^{-3}ydy+3ax^{-1}dy-6aax^{-4}yydx+12ax^{-2}ydx-6dx$, $R=x$, $\lambda=5$, & æquatio canonica $dK=6Mdx+xdM$. Iam ut inveniri poſſit, quid ſit M, in quantitate dK divido per dx omnia illa membra in quibus dx ineſt, prodibunt neglectis coefficientibus & ſignis $x^{-4}yy$, $x^{-2}y$ & 1, quare pono $M=Ax^{-4}yy+Bx^{-2}y+C+N$. Hoc autem valore litteræ M, eiusque elementi dM, in canonica ſubſtitutis proveniet æquatio:

X 2 +3

$+3a^3x^{-5}yydy-6aax^{-3}ydy+3ax^{-1}dy-6aax^{-4}yydx$
$+12ax^{-2}ydx-6dx$
$=2Ax^{-3}ydy+Bx^{-1}dy+2Ax^{-4}yydx+4Bx^{-2}ydx$
$+6Cdx+6Ndx+xdN$

Comparatio terminorum homologorum præbet, $A=-3aa$, $B=3a$, $C=-1$, & remanebit æquatio ſequens

$$3a^3x^{-5}yydy=6Ndx+xdN.$$

Ducatur hæc æquatio in x^5, provenietque $3a^3yydy =6Nx^5dx+x^6dN$. Utraque pars huius æquationis eſt integrabilis, invenietur enim integralis eius $a^3y^3=Nx^6$. Habemus ergo $N=a^3x^{-6}y^3$, adeoque $M(=Ax^{-4}yy+Bx^{-2}y+C+N)=-3aax^{-4}yy+3ax^{-2}y-1+a^3x^{-6}y^3$, adeoque $u(=MR^6=Mx^6)=-3aaxxyy+3ax^4y-x^6+a^3y^3 =a^3y^3-3aaxxyy+3ax^4y-x^6=(ay-xx)^3$.

Hoc idem integrale inveniſſemus ponendo $dK=3ayydy -6aaxxydy+3ax^4dy-6aaxyydx+12ax^3ydx-6x^5dx$. Dein $R=x$ vel $=y$, ſed $\lambda=0$, adeoque $\lambda+1=1$.

Exemplum 10.

Sit $du=(-\frac{3}{2}cyydy+\frac{3}{10}abbty^{-1}dy):\sqrt[4]{(a^3b-2cy^3+3abbt)^3}$ exiſtente $t=\sqrt[5]{accyy}$. Hoc loco eſt $dK=-\frac{3}{2}cyydy +\frac{3}{10}abbty^{-1}dy$, $R=a^3b-2cy^3+3abbt$, $\lambda=-\frac{3}{4}$, adeoque $\lambda+1=\frac{1}{4}$. & æquatio canonica $dK=\frac{1}{4}MdR+RdM$. Nunc vero, quia $\frac{1}{4}dR=dK$, erit $M=1$, adeoque $u(=MR^{\frac{1}{4}}) =\sqrt[4]{(a^3b-2cy^3+3abbt)}$.

Exemplum 11.

Si $du=(2axyydx+cxyydy-cy^3dx-2ccyydy-4axxydx +4ax^3dy+8ccyydx-2axxydy):(y^4-8xy^3+16xxyy)$. Quoniam $y^4-8xy^3+16xxyy$ eſt quadratum, cuius radix eſt

eſt $yy-4xy$; fiat $R=yy-4xy$, $\lambda=-2$, & $dK=2axyydx + cxyydy - cy^3dx - 2ccyydy - 4axxydx +$ &c. & æquatio canonica fiet, $dK=-MdR+RdM$. Eſt vero $dR=2ydy - 4ydx - 4xdy$. Reſpicio nunc ad omnia membra quantitatis dK, quæ per ydx dividi poſſunt, & præſcindendo a coëfficientibus & ſignis, inveniuntur quoti xy, yy, xx, y. Pono ideo

$M=Ay+Bxy+Cxx+Dyy$, & inveniemus æquationem canonicam mutari in æquationem

$$+2axyydx+cxyydy-cy^3dx-2ccyydy-4axxydy$$
$$+4ax^3dy+8ccyydx-2axxydy=+2Cxxydx-Bxyydy$$
$$+4D$$
$$+By^3dx-Ayydy-4Cxxydy+4Cxxdy+4Ayydx$$
$$+6D$$
$$-2Cxxydy-2Dy^3dy$$

Ex comparatione terminorum elicientur $A=2cc$, $B=-c$, $C=a$, & $D=o$, quare fit $M=2ccy-cxy+axx$, adeoque $u(=MR^{-1})=(2ccy-cxy+axx):(yy-4xy)$.

Exemplum 12.

Si $du=(4xyzdy-xxzdx-x^3dz+2xy^2zdx+2xyzdx - 2y^2zdy-2y^2zdy-2y^3dz-x^2zdy+xxydz)$: $(xx-2xy+yy)$.

Erunt $dK=4xyzdy-x^2zdx-x^3dz+2xy^2dz+2xyzdx - 2y^2zdy-2y^2zdx-2y^3dz-xz^2dy+x^2ydz$; $R=x-y$, $\lambda=-2$ adeoque æquatio canonica fit $dK=-MdR+RdM$. Iuxta ſuperiora invenietur ſumendum eſſe $M=Ax^2z+Bxyz + Cy^2z$, ope huius mutabitur canonica in æquationem cuius termini homologi inter ſe comparati præbebunt $A=-1$, $B=o$, & $C=2$, adeoque $M=-xxz+2yyz$, & $u(=MR^{-1})=2yyz-xxz:x-y$.

Exemplum 13.

Si $-addx=(ydx-xdy)^2 x:(xx+yy)^{\frac{3}{2}}$, in hypotheſi quod $ydx-xdy$ ſit conſtans. Integrabitur ponendo $du=-addx:ydx-xxdy$, $R=xx+yy$, $\lambda=-\frac{3}{2}$, & $\lambda+1=-\frac{1}{2}$ adeoque æquatio canonica pro hoc exemplo invenietur eſſe $dK=-\frac{1}{2}MdR+RdM$, atque adeo $xydx-xxdx=(-xdx-ydy)M+(xx+yy)dM$; Fiat $M=Ay$, & mutabitur æquatio in $xydy-xxdy=-Axydx+Axxdy$. Quare $A=-1$. & $u(=MR^{-\frac{1}{2}})=-y:\surd(xx+yy)$.

Atqui propter differentiale conſtans $ydx-xdy$, erit etiam $u=-adx:ydx-xdy$ quare $\frac{-adx}{ydx-xdy}=\frac{-y}{\surd(xx-yy)}$; hinc $adx=\frac{yydx-xydy}{\surd(xx+yy)}$, vel $abdx=\frac{byydx-bxydy}{\surd(xx+yy)}$ ducatur in x^{-2} fiet $-abx^{-2}dx=(bx^{-1}ydy-bx^{-2}yydx)):\surd(xx+yy)$; ſi nunc iterum ſit $R=xx+yy$ fiet pro hac æquatione competens æquatio canonica

$bx^{-1}ydy-bx^{-2}yydx=(ydy+xdx)M+(xx+yy)dM$; quare ſi ponatur $M=bx^{-1}$, æquatio hæc fiet identica; eſt ergo $c+\frac{ab}{x}$, integrale ipſius $-abx^{-2}dx=MR^{\frac{1}{2}}$, id eſt $=\frac{b\surd(xx+yy)}{x}$. Quæ æquatio eſt ad ſectiones conicas.

Exemplum 14.

Si $fdx=(dxdy^3+dx^3dy-xdxdyddx+xdx^2ddy):2x^3dy^3$. Integrare æquationem. Pone $dK=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dx^3dy^{-2}-\frac{1}{2}xdxdy^{-2}ddx+\frac{1}{2}xdx^2dy^{-3}ddy$, $R=x$, & $\lambda=-3$, adeoque $\lambda+1=-2$. Quare æquatio canonica nunc fit $dK=-2Mdx+xdM$. Elicietur ergo $M=A+Bdx^2ay^{-2}$. Ope huius vero æquatio canonica abit in

$\frac{1}{2}dx$

$\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dx^3 dy^{-2} - \frac{1}{2}xdxdy^{-2}ddx + \frac{1}{2}xdx^2 dy^{-3} ddy$
$= -2Adx - 2Bxdxdy^{-2}ddx - 2Bxdx^2 dy^{-3} ddy$, quare $A = -\frac{1}{4}$,
$B = -\frac{1}{4}$ & $\int\int dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2}$, vel addita conſtanti n.
$\int\int dx = (4nxxdy^2 - dx^2 - dy^2) : 4xxdy^2$.
Videantur ad hæc duo poſtrema exempla, *l:s Memoires de l'Acad. Royale des Sciences* 1710. circa finem.

DE INTEGRATIONIBVS AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM,

ubi traditur

METHODI ALICVIVS SPECIMEN INTEGRANDI

ſine prævia ſeparatione indeterminatarum:

Auctore Joh. Bernoulli.

I.

QUando æquatio aliqua differentialis primi gradus reducta habetur ad $pdx = qdy$, ubi p datur per x, & q per y, hoc eſt, meo loquendi more, ubi p & q ſunt functiones qualescunque datæ indeterminatarum x & y; eo caſu conſtructio æquationis nulla premitur difficultate, conceſſis nimirum quadraturis; quæ & ipſæ generaliter ad extenſiones curvarum algebraicarum non ita pridem reductæ ſunt, vid. Cel. Hermanni ſchediasma in actis Lipſ. 1723. meumque de hac materia analytice tractanda editum in iisdem actis 1724. Adeo ut hac in parte nihil ulterius ad maiorem perfectionem deſi-

M. Iun. 1726.

deſiderari videatur, niſi hoc tantum, quod, cum infinitis modis, ceu monſtravimus, idem præſtari poſſit, ille eligruta qui exhibeat curvam conſtructu facillimam, cuius extenſione uti lubeat ad quadraturam determinandam. Hanc vero rem, utpote alius negotii, nunc non attingimus.

II. Quod ſi autem æquatio differentialis $pdx = qdy$ laborat indeterminatarum permixtione, id eſt, ſi utraque quantitas p & q vel alterutra ſaltem componitur diverſimode ex indeterminatis x & y ſimul, earumque variis potentiis, atque contineant vel non contineant varia ſigna radicalia; id quidem eſt, quod hodienum crucem figit geometris, nec quemquam novi hucusque, qui generalem invenerit Regulam (ad praxim applicabilem) integrandi eiusmodi æquationes differentiales, ſi integrabiles ſunt, aut, ſi non ſunt, conſtruendi eas ſive per quadraturas ſive per rectificationes curvarum datarum; dico notanter *applicabilem ad praxin*, nam cum conſtructio requirat executionem, nihil penſi haberem alicuius regulæ, quæ in ſpeculatione tantum ſubſiſteret, re ipſa autem nullius eſſet uſus, quæ & totam requireret hominis ætatem, ſi in leviſſimis quoque exemplis vellet eam effectui dare. Tales utique regulæ generales, vel potius regularum ideæ, etiam mihi in promtu forent, ſed quas ob dictam rationem negligo.

III. Dantur regulæ particulares, etſi omnibus caſibus in ſuo quæque genere applicabiles, quæ cum ſucceſſu adhibentur: Earum multas ac varias iam eo tempore excogitavi, quo de naſcente calculo vix quisquam alius cogitabat, nedum ad eius perfectionem animum applicabat. Inventas regulas communicavi paulo poſt cum amicis, partim coram, partim per litteras, præſertim cum Illuſtr.

Mar-

Marchione Hoſpitalio, in cuius privatam utilitatem initio a me conſcriptæ lectiones, in multorum iam manibus verſantes, æque ac litteræ meæ cum ipſo poſtea frequenter commutatæ, luculento ſunt veritatis teſtimonio.

IV. Inter prædictas regulas maximam univerſalitatem ſive extenſionem habet illa, quæ valet pro omnibus æquationibus differentialibus, quantæcunque dimenſionis ſint termini, modo ubique ſint homogenei, id eſt, in quibus exponentes indeterminatarum x & y ſimul ſumti eundem in quolibet termino componunt numerum, adeoque litteræ conſtantes, quæ in eiusmodi æquationibus occurrunt, nihil aliud deſignant quam numeros coefficientes, nihilque proin contribuunt ad dimenſionum ſuppletionem. Monſtravi namque talem æquationem mutari in aliam indeterminatas ſeparabiles habentem, ſi aſſumendo novam indeterminatam z, ſubſtituatur zy pro x, & $zdy + ydz$ pro dx; vel contra zx pro y, & $zdx + xdz$ pro dy. Aut etiam quod interdum ſimpliciorem reddit æquationem, ſi pro x ſcribatur $z^n y$, atque pro dx, $z^n dy + nyz^{n-1}dz$, vel vice verſa $z^n x$ pro y, & $z^n dx + nxz^{n-1}dz$ pro dy; ita enim fit, ut, cum n ſit exponens arbitrarius, pro eo aliquis eligi poſſit, qui exhibeat æquationem tractabiliorem. Quinimo certiſſimum eſt, nihil obſtare, quo minus adhiberi queat functio quælibet ipſius z ad arbitrium formata, ponendo ex. gr. $y\sqrt{(aa+zz)}$ pro x, adeoque $dy\sqrt{(aa+zz)} + yzdz : \sqrt{(aa+zz)}$ pro dx; aut ſi mavis $x\sqrt{(aa+zz)}$ pro y, & $dx\sqrt{(aa+zz)} + xzdz : \sqrt{(aa+zz)}$ pro dy.

V. Dantur ſane caſus, ubi talis functionum formatio utilitate ſua non caret, præcipue in illis aliquando, in quibus ſigna radicalia reperiuntur: ſciendum enim regulam noſtram porrigi quoque ad eas omnes æquationes,

quæ unum pluresve terminos habent ſignis radicalibus affectos. Verbi gratia, ſit propoſita æquatio inter coordinatas x & y alicuius curvæ hæc $axdy + dx\sqrt{(xx+yy)} = o$, in qua indeterminatæ x & y ſunt unius dimenſionis, quia quantitas $\sqrt{(xx+yy)}$ non niſi primæ dimenſionis eſſe cenſetur; ſi itaque ſecundum regulam noſtram ſimpliciter ponatur zy & $zdy+ydz$ pro x, & dx, mutatur æquatio propoſita in hanc $\frac{dy}{y} + \frac{dz\sqrt{(zz+1)}}{az+z\sqrt{(zz+1)}} = o$, quæ quidem non amplius laborat indeterminatarum permixtione; at vero irrationalitas adhuc ineſt, quæ nondum permittit videre, annon forſan ex differentialibus logarithmicis componatur æquatio, unde illa per integrationem ad terminos finitos deinceps reduci poſſit.

VI. Quam ob rem præſtat ut ſcribam pro x productum ipſius y per convenientem aliquam functionem ipſius z ad aſymetriam tollendam; in hunc finem pono ex. gr. $x = y\sqrt{(zz-1)}$ ac proinde $dx = dy\sqrt{(zz-1)} + yzdz:\sqrt{(zz-1)}$ quibus ſubſtitutis in æquatione propoſita $axdy+dx\sqrt{(xx+yy)} = o$, convertetur illa in hanc $(z^3+azz-z-a)dy + yzzdz = o$, quæ per diviſionem reducta dat hanc alteram $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3+azz-z-a} = o$, ab omni irrationabilitate immunem: Reſolvitur vero poſterius membrum $\frac{zzdz}{z^3+azz-z-a}$ in differentialia logarithmica per methodum quam communicavi in Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. an. 1702, & in Actis Lipſ. an. 1703: Cum enim denominator huius fractionis $z^3+azz-z-a$ conſtet ex iſtis tribus factoribus $z+a$, $z+1$ & $z-1$, faciendum eſt ex præſcripto illius methodi $\frac{zzdz}{z^3+azz-z-a} = \frac{\alpha dz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1}$, tum quærendi valores literarum α, β, γ.

α, β, γ, qui reperientur eſſe $\alpha = \frac{aa}{aa-1}$, $\beta = \frac{-1}{2a-2}$, $\gamma = \frac{1}{2a+2}$; Quare æquatio noſtra $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3 + azz - z - a} = 0$, ſeu $\frac{dy}{y} + \frac{\alpha dz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1} = 0$, (ſubſtitutis valoribus ipſarum α, β, γ & dein ſingulis terminis in $2aa-2$ ductis) abibit in hanc æquationem $\frac{(2aa-2)dy}{y} + \frac{2aadz}{z+a} - \frac{(a+1)dz}{z+1} + \frac{(a-1)dz}{z-1} = 0$, in differentialibus logarithmicis expreſſam, quæ integrata, ut olim docuimus, reddit $(2aa-2)ly + 2aa\, l(z+a) - (a+1)l(z+1) + (a-1)l(z-1) = lC$, ubi per lC intelligo logarithmum quantitatis conſtantis pro lubitu aſſumtæ; reducendo igitur, ut moris eſt, logarithmos ad potentias, acquiritur æquatio finita ſeu in terminis finitis expreſſa $y^{(2aa-2)} \times (z+a)^{2aa} \times (z+1)^{(-a-1)} \times (z-1)^{(a-1)} = C$. Nunc vero, ut in coordinatis x & y exprimatur, reſtituendus eſt valor ipſius z, qui ex hypotheſi aſſumta $x = y\sqrt{(zz-1)}$, eſt $= \sqrt{(xx+yy)} : y$, hinc enim emergit $y^{(2aa-2)} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}+ay}{y}\right)^{2aa} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}+y}{y}\right)^{(-a-1)} \times \left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y}\right)^{(a-1)} = C$; vel quia in denominatoribus habetur y elevata ad $2aa$, ad $-a-1$, & ad $a-1$, quarum ſumma $= 2aa-2$, patet tres iſtos denominatores y deſtrui per alteram y fractionibus præmiſſam, ita ut tandem hæc prodeat æquatio naturam curvæ determinans $(\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{2aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}+y)^{(-a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}-y)^{(a-1)} = C$; Quæ ſi dextre tractetur ulterius reduci poteſt in iſtam $x^{(a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}+y)^{-a} = C$; vel etiam in hanc $x^{(-a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)}+ay)^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)}-y)^{a} = C$: Ubi recordandum, per litteram C intelligi perpetuo conſtantem arbitrariam in omnibus æquationibus ſumendam vel eandem vel diverſam prout libuerit; quod in ſequentibus etiam ſicubi reperietur monitum volo.

VII. Singularis caſus conſiderandus hic venit, exiſtente nimirum $a=1$, quo fit ut duo priores factores in prima æquatione, qui iam erunt $(\sqrt{(xx+yy)}+y)^2$ & $(\sqrt{(xx+y)}+y)^{-2}$ ſe mutuo deſtruant, & tertius $(\sqrt{(xx+yy)}-y)^0$ evadat $=1$, unde tota æquatio foret $1=C$; ſic pariter ſecunda & tertia, ex prima æquatione deductæ, in caſu $a=1$, abirent in $1=C$, quod eſſet abſurdum, unitas enim non poteſt eſſe æqualis quantitati arbitrariæ C. Quæritur itaque, quid iam ſit ſtatuendum, utrum in hoc caſu nulla ſatisfaciat curva æquationi propoſitæ, quæ iam eſt $xdy+dx\sqrt{(xx+yy)}=o$, aut ſi aliqua ſatisfaciat, quo. modo illa determinetur? Hunc ſcrupulum ut tollam, dico, incommodum iſtud ex eo venire, quod in præced. §. æquatio $\frac{dy}{y}+\frac{\alpha dz}{z+a}+\frac{\beta dz}{z+1}+\frac{\gamma dz}{z-1}=o$ multiplicata fuerit per $2aa-2$, h. e. per o in hoc caſu, unde totam æquationem evaneſcere neceſſe eſt. Ut igitur hoc evitemus, notandum eſt quantitatem $zzdz:(z^3+azz-z-a)$, quam æqualem ſuppoſuimus hiſce fractionibus $\frac{\alpha dz}{z+a}+\frac{\beta dz}{z+1}+\frac{\gamma dz}{z-1}$, continere in ſe aliquid abſolute integrabilis quando $a=1$; illa igitur non poteſt ſupponi conſtare ex meris differentialibus logarithmicis. Quod autem contineat partem aliquam integrabilem, ex eo patet, quod denominator fractionis, qui iam eſt $z^3+zz-z-1$, conſtet ex duobus factoribus $zz+2z+1$, & $z-1$, quorum ille eſt quadratum perfectum; unde $dz:(zz+2z+1)$ fiet integrabile, eſt enim eius integrale $=-1:(z+1)$. Oportet itaque, ceu monui in præmemoratis Commentariis Paris 1702. pag. 290. Edit. Paris. ſeparare ex quantitate $zzdz:(z^3+zz-z-1)$ illud quod eſt integrabile, & tum procedere ſecundum regulam, quod utrumque ſimul ſic perago: Pono ſta-

tim

tim $\frac{zzdz}{z^3+zz-z-1} = \frac{\alpha dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1} + \frac{\pi dz}{zz+2z+1}$, quibus reductis ad communem denominatorem $z^3+zz-z-1$ habebo æqualitatem inter numeratorem zz & ſummam trium reliquorum, quæ erit $(\alpha+\gamma)zz+(2\gamma+\pi)z+(\gamma-\pi-\alpha)$; inſtituta comparatione terminorum faciendo $\alpha+\gamma=1$, $2\gamma+\pi=0$, $\gamma-\pi-\alpha=0$, invenietur $\pi=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{3}{4}$, $\gamma=\frac{1}{4}$. His ita inventis integrentur, ut olim monſtravimus, termini æquationis $\frac{dy}{y}+\frac{zzdz}{z^3+zz-z-1}=0$, & prodibit $ly+\frac{3}{4}l(z+1)+\frac{1}{4}l(z-1)+\frac{1}{2z+2}=lC$, ſeu $4ly+3l(z+1)+l(z-1)=\frac{-2}{z+1}+lC$; hinc ergo conſiderando unitatem tanquam logarithmum numeri alicuius qui vocetur n, habebitur $y^4\times(z+1)^3\times(z-1)^1=C\times n^{-2:(z+1)}$, quæ, ſubſtituto pro z eius valore $\sqrt{(xx+yy)}:y$ & reductis reducendis ut ſupra factum deſinit in iſtam $(\sqrt{(xx+yy)}+y)^3\times(\sqrt{(xx+yy)}-y)^1=C\times n^{-2y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$, transmutabilem porro in $(\sqrt{(xx+xyy)}+y)\times x=C\times n^{-y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$, vel etiam non minus ſimplici modo in $(\sqrt{(xx+yy)}-y)^{-1}\times x^3=C\times n^{-y:\sqrt{(xx+yy)}+y}$; quarum autem quælibet ſi evolvatur, & homogeneitatis gratia ſcribatur bbRR pro quadrato quantitatis exponentialis, hanc induit faciem $x^4\pm 2bRyx - bbRR=0$. Aio igitur hanc æquationem $x^4\pm 2bRyx - bbRR=0$ oriri ex vera integratione huius differentialis $xdy+dx\sqrt{(xx+yy)}=0$; quod confirmabitur a poſteriori, ſi nimirum illa differentietur & quod provenit cum hac comparetur. Unde videmus curvam propoſitæ æquationi ſatisfacientem non eſſe algebraicam ſed exponentialem, & ita quidem, ut ipſæ indeterminatæ ingrediantur exponentem, qua in re differt ab omnibus aliis caſibus particularibus æquationis generaliter propoſitæ $axdy+$

$dx\sqrt{(xx+yy)}=o$, utpote quæ in quovis alio caſu ſemper admittit curvam aliquam algebraicam, modo a ſit rationalis; aut ſi a non eſt rationalis, erit quidem curva exponentialis, ſed exponentem nulla quantitas variabilis (ſicuti in caſu $a=1$) ingreditur, cuiusmodi curvæ dici posſunt algebraicis proximæ.

VIII. Paulo fuſior fui quam forſan neceſſe videbatur in diſcuſſione huius exempli, quod, cum olim Lutetiæ agerem, multum agitabatur inter Geometras eius loci, ex occaſione problematis Beauniani, mihi tunc quoque cum aliis ab Hoſpitalio propoſitum atque feliciter ſolutum, poſtquam a Geometris inſolutum ad me perveniſſet: Fuſior igitur in hoc fui, ut fieret manifeſtum, qua dexteritate evitari poſſit ingens aliquando calculus, in quem intricaremur, ſi regulas generales, prout primo intuitu ſe offerunt, ſine ulla circumſpectione ſequi vellemus: Præterquam quod multoties accidat, ut credamus curvas quæ prodeunt per incautam regularum applicationem eſſe tranſcendentes, nonniſi per quadraturas aut rectificationes conſtruibiles, quæ tamen ſi rite tractentur evadunt algebraicæ aut ſaltem exponentiales, hoc eſt, tales quæ ſunt finitæ & non aliter tranſcendentes quam ex ſola exponentium irrationalitate. Quis enim prima fronte non crederet, æquationem ſupra §. 5. expreſſam $\frac{dy}{y}+\frac{dz\sqrt{(zz+1)}}{zz+z\sqrt{(zz+1)}}=o$, quæ oritur ex ſuppoſitione $x=zy$, deducere ad curvam tranſcendentem? niſi ante omnia id curet, ut ſublata irrationalitate $\sqrt{(zz+1)}$ per methodum Diophanteam acquirat fractionem rationalem, quam deinde per noſtram methodum in §. 6. traditam in differentialia logarithmica reſolvat: ſed & hic proceſſus operoſi

roſi foret calculi; quare tutiſſimum erit ut ſtatim ab initio diſpiciatur, prout exempli cuiusque natura exigit, de commoda aliqua functione aſſumtæ z ſubſtituenda in locum alterutrius indeterminatarum x vel y, quo immediate preveniatur ad æquationem rationalem & ſimplicem, ſicuti hic factum vidimus, ubi ſola ſubſtitutione $y = x\sqrt{(zz-1)}$ obtinuimus hæc tria ſimul, nempe indeterminatarum ſeparationem, rationalitatem terminorum & maximam poſſibilem æquationis ſimplicitatem $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3 + azz - z - a} = 0$.

IX. Pergo ad methodum a me inventam integrandi æquationes differentiales ſine adhibita indeterminatarum ſeparatione, aliave ulla earum in alias transmutatione per ſubſtitutionem facienda; loquor hic de illis æquationibus $pdx + qdy = 0$, in quibus p & q deſignant functiones rationales & homogeneas indeterminatarum x & y utcunque inter ſe complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatæ in ſingulis terminis eandem habeant exponentium ſummam, propter quod functiones, quæ ita ſunt comparatæ, ipſasque æquationes differentiales ex illis compoſitas voco *homogeneas*.

X. Poſtquam eiusmodi æquationes a fractionibus liberatæ ſunt ope multiplicationis, erunt illæ ordinis vel primi, vel ſecundi, vel tertii, vel cuiuscunque altioris; voco autem *ordinem primum*, *ſecundum*, *tertium* &c. ubi exponentium ſumma in quolibet termino obtinet dimenſionis gradum primum, ſecundum, tertium &c. His ita definitis, formo ſequentem tabellam, quæ conſpectui offert ordines æquationum canonicarum; per æquationem *canonicam* intelligo talem, quæ omnes æquationes particula-

culares alicuius ordinis in ſe complectitur ope coefficientium univerſalium ſingulis terminis præfixorum.

Tabella æquationum Canonicarum differentialium.

I. $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=o.$

II. $(axx+bxy+cyy)dx+(exx+fxy+gyy)dy=o.$

III. $(ax^3+bxxy+cxyy+ey^3)dx+(fx^3+gxxy+hxyy+iy^3)dy=o.$

IV $(ax^4+bx^3y+cxxyy+exy^3+fy^4)dx+(hx^4+ix^3y+kxxyy+mxy^3+ny^4)dy=o.$

V. $(ax^5+bx^4y+cx^3yy - - - +hy^5)dx+(ix^5+kx^4y+mx^3yy - - - +qy^5)dy=o.$

XI. Ex hac tabella patet, æquationem canonicam cuiusque ordinis tot habere terminos præfixos ipſi dx, totidemque præfixos ipſi dy, quot habet unitates numerus ordinis unitate auctus. Sic æquatio ordinis primi, habet terminos utrobique duos; ordinis ſecundi, terminos tres; Tertii, quatuor; Quarti, quinque; & ita porro: Itaque in ordine primo ſunt coefficientes univerſales quatuor, in ſecundo ſunt ſex, in tertio octo, in quarto decem &c. Iam dico has omnes æquationes poſſe integrari ſeu reduci ad æquationes finitas, exprimentes naturam linearum, quæ ſingulæ conveniunt ſuis reſpective æquationibus canonicis differentialibus. Iſtæ vero æquationes finitæ erunt ſemper algebraicæ vel ſaltem exponentiales, prout exponentes indeterminatarum fuerint vel rationales vel irrationales. Quandoquidem igitur æquationes canonicæ in hac tabella continuanda comprehenſæ, includunt omnes quæ dari poſſunt æquationes differentiales homogeneas & rationales, liquet, ſi oſtendero modum canonicas integrandi, rem generaliter confectam fore pro quacunque eiusmodi æquatione differentiali integranda ſine prævia indeterminatarum ſeparatione: Hoc vero eſt, quod iam docere volo.

XII. In

XII. In anteceſſum notare convenit, cuicunque æquationi differentiali homogeneæ, ſive ſit rationalis, ſive irrationalis, ſatisfacere lineam aliquam rectam, id quod ex eo patet, quia, ſi ponatur $y = nx$, adeoque $dy = ndx$ (aſſumto coefficiente invariabili n) iique valores pro y & dy in æquatione differentiali ſurrogentur, prodibit utique æquatio quæ diviſa per dx, & per potentiam ipſius x, cuius exponens eſt ipſe ordinis index, dabit æquationem algebraicam, ab indeterminatis liberam, inter cognitas a, b, c, &c. & incognitam n, eiusque varias dimenſiones; unde ſuppoſita radicum extractione ex æquationibus algebraicis, erit illius æquationis radix n coefficiens quæſitus in nx, quod ipſi y æquale ponebatur.

XIII. Ut res exemplo illuſtretur, capiamus æquationem differentialem canonicam ordinis ſecundi $(axx + bxy + cyy)dx + (exx + fxy + gyy)dy = o$, atque in ea ſubſtituamus nx pro y; $nnxx$ pro yy & ndx pro dy: Quo facto habebitur $(axx + nbxx + nncxx)\,dx + (exx + nfxx + nngxx)ndx = o$; Dividendo igitur per $xxdx$, ac more ſolito ſecundum ordinem dimenſionum incognitæ n diſponendo, reſultat æquatio cubica $gn^3 \begin{smallmatrix}+f\\+c\end{smallmatrix} nn \begin{smallmatrix}+e\\+b\end{smallmatrix} n + a = o$, cuius radix n ducta in x dabit valorem ipſius y. Adeoque ſi conſtruatur triangulum rectangulum (ſuppoſito coordinatas angulum rectum facere) cuius baſis ad cathetum habeat rationem ut 1 ad n, dico hypotenuſam huius trianguli in utramque partem prolongatam eſſe lineam ſatisfacientem æquationi differentiali canonicæ ordinis ſecundi, cuius coordinatæ ſunt parallelæ baſi & catheto.

XIV. Loco alterius exempli ex homogeneis irrationalibus ſit æquatio in §. 5. propoſita $axdy + dx$

 $\surd(xx$

$\sqrt{(xx+yy)}=0$. Ubi ſi ponatur $nnxx$ pro yy & ndx pro dy, ac poſtea dividatur per xdx; emerget $na+\sqrt{(1+nn)}=0$, quæ reſoluta dat $n=1:\sqrt{(aa-1)}$. Facto itaque triangulo cuius baſis ad cathetum ſit ut 1 ad $1:\sqrt{(aa-1)}$, hoc eſt, ut $\sqrt{(aa-1)}$ ad 1, erit hypotenuſa utrimque prolongata conveniens linea æquationi differentiali propoſitæ $axdy+dx\sqrt{(xx+yy)}=0$, eiusque coordinatæ lateribus parallelæ. Si $a=1$, abit hypotenuſa in rectam applicatis parallelam, abſciſſæ vero evaneſcunt: Hicque caſus omnino fluit ex æquatione ad curvam quam ſupra §. 7. invenimus $x^4\pm 2bRyx-bbR^2=0$, faciendo enim b (quia eſt arbitraria) $=0$, habetur $x^4=0$, adeoque $x=0$.

XV. Propero nunc ad methodum eruendi quoque lineas curvas, æquationibus canonicis differentialibus cuiusque ordinis reſpondentes, h. e. integrandi illas æquationes univerſaliter, idque ſine interventu ſeparationis indeterminatarum. Hoc ut præſtetur, formanda eſt æquatio finita, in quam ingrediantur tot litteræ aſſumtitiæ conſtantes, quot ſunt termini in æquatione canonica integranda, & quæ differentiata easdem cum hac obtineat dimenſiones indeterminatarum x & y. Illa autem æquatio finita talem (ceu cuilibet attendenti haud ægre pateſcit) habere debet formam $(x+\alpha y)^{\pi}\times(x+\beta y)^{\tau}\times(x+\gamma y)^{\varrho}\times(x+\varepsilon y)^{\phi}\times$ &c. $=C$, ut nimirum conſtituatur productum ex factoribus binomialibus $x+\alpha y$, $x+\beta y$, $x+\gamma y$, $x+\varepsilon y$ &c. ad potentias π, τ, ϱ, ϕ &c. elevatis, quod æquale fiat quantitati conſtanti C, ubi coefficientes α, β, γ, ε, ut & exponentes π, τ, ϱ, ϕ, &c. ſunt aſſumtitii per calculum inveſtigandi. Quod attinet ad numerum factorum horum binomialium, aſſumendi ſunt

duo

duo pro canonica primi ordinis, tres pro canonica ſecundi ordinis, quatuor pro canonica tertii ordinis, atque ita conſequenter. Hoc nempe pacto fit, ut tot ſimul habeantur aſſumti coefficientes & exponentes, quot ſunt termini in propoſita æquatione canonica. Unde differentiando, eum in modum quem ſtatim exponam, aſſumtam æquationem formatam ex factoribus binomialibus, prodibit æquatio differentialis eiusdem ordinis & tot præciſe terminorum, quot canonica habet, adeo ut totidem inſtitui poſſint comparationes inter utriusque terminorum coefficientes, quæ determinabunt aſſumtos coefficientes & exponentes, ipſamque adeo æquationem finitam, quæ deſideratur, pro data canonica differentiali.

XVI. Dabo exemplum unicum & quidem omnium facillimum, quod abunde illuſtrabit methodum: Sit æquatio canonica primi ordinis $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=o$ integranda, cui ſuppono convenire hanc æquationem finitam $(x+\alpha y)^\pi \times (x+\beta y)^\tau = C$; indagandi ergo ſunt valores litterarum α, β, π, τ. Hoc ut commode fiat, ſumo, priusquam differentietur, logarithmos aſſumtæ æquationis finitæ, & habebo $\pi l(x+\alpha y)+\tau l(x+\beta y)=lC$, quæ poſtea more ſolito differentiata mihi dat $\frac{\pi dx+\alpha\pi dy}{x+\alpha y}+\frac{\tau dx+\beta\tau dy}{x+\beta y}=dlC=o$; ſeu peracta reductione, multiplicando ſcilicet per crucem, ut denominatores tollantur, $(\pi+\tau)xdx+(\beta\pi+\alpha\tau)ydx+(\alpha\pi+\beta\tau)xdy+(\alpha\beta\pi+\alpha\beta\tau)ydy=o$. Itaque hanc inter & canonicam $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=o$ inſtituenda eſt comparatio terminorum ſimilium ad determinandos coefficientes & exponentes asſumtos α, β, π, τ, unde hæ quatuor emergent æqualitates $\pi+\tau=a$, $\beta\pi+\alpha\tau=b$, $\alpha\pi+\beta\tau=c$, $\alpha\beta\pi+\alpha\beta\tau=e$.

 Com-

Computo iam recte inſtituto, reperientur valores optati tam coefficientium quam exponentium, quemadmodum ſequitur, ſcilicet

$$\alpha = \frac{b+c-\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2a}$$

$$\beta = \frac{b+c+\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2a}$$

$$\pi = \frac{ab-ac+a\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}$$

$$\tau = \frac{-ab+ac+a\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}$$

Ubi notandum, poſſe hos valores ſimplicius exprimi, reducendo nempe x in utroque factore binomiali ad communem denominatorem $2a$, & hunc poſtea omittendo; ſicuti etiam dividendo exponentes inventos per communem quantitatem $a : 2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$. Liquet enim, ſi $(x+\alpha y)^{\pi} \times (x+\beta y)^{\tau}$ fuerit $=$ conſtanti, fore etiam $(2ax+2a\alpha y)^{\frac{\pi}{\pi}} \times (2ax+2a\beta y)^{\frac{\tau}{\pi}} =$ conſtanti. His ita monitis, & ſcripto brevitatis gratia m pro $\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$ atque C maiuſculo pro quantitate conſtanti arbitraria, dico hanc æquationem finitam $(2ax+(b+c-m)y)^{(b-c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(-b+c+m)} = C$, eſſe integralem æquationis differentialis canonicæ primi ordinis $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, omnes poſſibiles caſus particulares huius ordinis in ſe complectentis. Poteſt vero inventa illa æquatio finita mutari in hanc formam, adhibita aliqua dexteritate, $(axx+byx+cyx+eyy)^{(-b+c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(2b-2c)} = C$, vel in hanc aliam nonnihil diverſam $(axx+byx+cyx+eyy)^{(b-c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(-2b+2c)} = C$.

Coroll. I.

XVII. Hinc ſi $b=c$, erit tunc in prima æquatio-

tione inventa, neglecto communi exponente m utriusque factorum, $(2ax+(2b-m)y)\times(2ax+(2b+m)y)=C$; hoc eſt, multiplicatione actualiter peracta, erit $4aaxx+8abxy+(4bb-mm)yy=C$, ſive, reſtituto valore ipſius mm & dein per $4a$ diviſo, proveniet $axx+2bxy+eyy=C$, quod idem etiam ex duabus mutatis provenit; ſicuti omnino provenire debet per vulgarem integrandi modum, qui hoc in caſu locum habet, cum enim nunc ſit $axdx+b(ydx+xdy)+eydy=o$, cuius ſingulæ partes ſunt integrabiles; integrentur ergo, & erit duplum ſumendo, $axx+2byx+eyy=C$; ut modo habuimus.

Coroll. 2.

XVIII. Eſto iam alterutra a vel $e=o$; erit $m=b+c$, quo ſubſtituto in prima noſtra æquatione mutabitur illa (poſito $e=o$) in hanc $x^b\times(ax+by+cy)^c=C$ vel (poſito $a=o$) in hanc $y^c\times(bx+cx+ey)^b=C$. Idem dant duæ reliquæ, in quas prima illa mutata fuit.

Coroll. 3.

XIX. Si $m=o$, hoc eſt, ſi $bb+2bc+cc=4ae$; prima noſtra generalis æquatio finita reſpondens differentiali canonicæ primi ordinis, migraret in hanc quæ abſurdum quid contineret $(2ax+(b+c)y)^{b-c}\times(2ax+(b+c)y)^{-b+c}=C$: Quia enim factores nunc ſunt æquales, exponentes vero, utpote alter alterius negativus, ſe mutuo deſtruunt, haberetur $(2ax+(b+c)y)^o=C$, ſive $1=C$ i.e. unitas = quantitati arbitrariæ, quod utique eſſet abſonum & nihil indicaret, idemque etiam ex reliquis duabus emergeret. Quocirca cautela aliqua hic opus eſt, ne quis credat nullam prorſus in hoc caſu dari æquationem inter coordinatas x & y; ſic itaque ſtatuo: Fingamus loco exponentis o haberi exponentem generalem p, ita ut ſit

 (2*ax*

$(2ax+(b+c)y)^p=C$; atque cum C denotet quantitatem arbitrariam, vocatur illa C^p; eritque $(2ax+(b+c)y)^p=C^p$, unde extracta radice exponentis p, fiet $2ax+(b+c)y=C$; hoc autem valet qualiſcunque ſit p, ergo etiam quando $p=o$. Proinde dico, æquationem $2ax+by+cy=C$ ſatisfacere in caſu quo $m=o$, ſeu quo $bb+2bc+cc=4ae$. Atqui hoc ita ſe habere apparebit, ſi in æquatione $(ax+by)dy+(cx+(\frac{bb+2bc+cc}{4a})y)dy=o$, pro x & dx ponantur eorum valores ex æquatione inventa eliciti, $-(b+c)y:2a$ & $-(b+c)dy:2a$, etenim evaneſcet ut fieri debet æquatio propoſita $(ax+by)dx+(cx+\frac{bb+2bc+cc}{4a}y)dy=o$. Hinc videmus, nullam lineam curvam huic caſui inſervire, ſed rectam tantum ex hac æquatione $2ax+by+cy=o$ deſcribendam. Quæ eadem quoque reperitur, ſi adhibetur regula in §. 12. tradita pro determinandis lineis rectis, quas in univerſum omnes æquationes canonicæ admittunt, ut ibidem oſtendi.

Coroll. 4.

XX. Quod ſi quatuor coefficientes a, b, c, e ſint proportionales, adeoque ſi $ae=bc$ in hoc caſu erit $m=b-c$; id quod quamlibet ex tribus noſtris æquationibus finitis mutat in $(2ax+2cy)^{2b-2c}=C$, vel, neglecto exponente, in $ax+cy=C$, quæ iterum eſt ad lineam rectam. Quod quidem immediate colligi poteſt ex propoſita æquatione differentiali, quæ in præſenti caſu eſt $(ax+by)dx+(cx+\frac{bc}{a}y)dy=o$ diviſibilis per $ax+by$; prodit enim $dx+\frac{c}{a}dy=o$, ſeu $adx+cdy=o$; adeoque integrando, erit $ax+cy=C$, ut ante. Et hic quidem caſus cum altero §. præcedentis ſunt fortaſſe ſoli, qui

per

per ſolas lineas rectas ſolvi poſſunt, omnemque adeo curvam excludunt.

Coroll. 5.

XXI. Cum in æquatione canonica indeterminatæ x, y earumque differentiales dx, dy ſimili gaudean habitu & relatione inter ſe invicem, manifeſtum eſt poſſe mutari æquationem finitam in aliam æquipollentem, ſcribendo tantum in illa y pro x, e pro a, c pro b & vice verſa. Quo facto prima noſtra æquatio finita $(2ax+by+cy-my)^{b-c+m} \times (2ax+by+cy+my)^{-b+c+m} = C$, induet hanc aliam formam, licet reipſa non diverſam $(2ey+bx+cx-mx)^{c-b+m} \times (2ey+bx+cx+mx)^{-c+b+m} = C$. Quod verum eſſe comperietur, ſi utraque differentietur eo modo quo uſi ſumus in §. 16. reducendo nempe ad logarithmos ante differentiationem. Ita quoque reliquæ duæ in has æquipollentes permutantur, $(axx+byx+cyx+eyy)^{b-c+m} \times (2ey+(b+c-m)x)^{-2b+2c} = C$; & $(axx+byx+cxy+eyy)^{-b+c+m} \times (2ey+(b+c+m)x)^{2b-2c} = C$.

Coroll. 6.

XXII. Illud quoque notatu dignum reputo, quod omnes curvæ, quæ reſpondent æquationibus noſtris finitis, habent areas ſuas quadrabiles, uno tantum caſu excepto, quando ſcilicet $b=c$. Quod ſane pro parodoxo haberi poſſet, niſi res admodum facile demonſtraretur ex ipſa æquatione canonica $(ax+by)dx+(cx+ey)dy = o$ apte diſpoſita. Liquet enim, illam ita poſſe ordinari, $axdx+cydx+cxdy+eydy = (c-b)ydx$, ut integrabilis fiat per partes prioris membri, alterum vero deſignet elemementum areæ ydx in $c-b$ ductum; integrando ita-

itaque per partes prodibit $\frac{1}{2}axx + cxy + \frac{1}{2}eyy = (c - b)$ $\int ydx + C$, unde $\int ydx$ ſeu area curvæ erit $= \frac{axx + 2cxy + eyy - 2C}{c - b}$ & proinde quadrabilis, præterquam in caſu $c = b$, in quo haberetur $= \infty$, h. e. $=$ infinito, quod ipſum indicio eſt in illo caſu aream curvæ eſſe inquadrabilem; etiamſi hoc iam concludi poſſit ex ipſa æquatione ad curvam, quam in §. 17. hanc eſſe invenimus $axx + 2bxy + eyy = o$, & quæ ſi examinetur, ad hyperbolam vel ellipſin ſpectare obſervabitur.

Scholium.

XXIII. Ex hoc, quod ad longum deduximus, ſpecimine pro integranda æquatione canonica primi ordinis, ſine præcedanea indeterminatarum ſequeſtratione, nemo non videt, methodum eſſe generalem pro quocunque ordine, aſſumendo pro ſecundo ordine hanc æquationem $(x + \alpha y)^{\pi} \times (x + \beta y)^{\tau} \times (x + \gamma y)^{\varrho} = C$; pro tertio hanc $(x + \alpha y)^{\pi} \times (x + \beta y)^{\tau} \times (x + \gamma y)^{\varrho} \times (x + \varepsilon y)^{\phi} = C$, & ita pro cæteris, ſic enim fiet, ut pro quolibet ordine tot reperiantur litteræ aſſumtitiæ α, β, γ, ε, &c. π, τ, ϱ, ϕ, &c. quot ſunt coefficientes in æquatione differentiali canonica illius ordinis, atque hoc modo obtineantur totidem æqualitates ad determinandos tam coefficientes α, β, γ, ε, &c. quam exponentes π, τ, ϱ, ϕ, &c. In altioribus evadit calculus operoſior quidem, ac propterea moleſtior, ſed ideo methodus haudquaquam difficilior, quippe quæ uniformis eſt in omnibus.

C. G.

DE CASIBVS

quibus integrari poteſt

ÆQVATIO DIFFERENTIALIS

$ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy.$

OBSERVATIONES QVÆDAM.

CUm Anno 1721. Venetiis inviſerem Cl. Zendrinum Medicum & Mathematicum celebrem eo die quo ab urbe diſcedere conſtitueram, accidit ut Nicolai Bernoulli Ioh. Fil. mentionem faceret, eumque iam ab aliquo tempore Venetiis eſſe mihi affirmaret; igitur mox, ut optaveram, in amicitiam humaniſſimi viri perveni, eaque cauſa abitum meum in ſextum diem diſtuli.

Inter colloquia quæ illo tempore habuimus, & ex quibus me multum profeciſſe ſemper fatebor, æquationem quandam differentialem ab Ill. Riccato olim propoſitam mihi oſtendit huiusmodi: $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy.$ ut tentarem, an quo caſu illam vel ſeparare vel integrare poſſem. Inveni igitur paullo poſt, ſi æquatio generalior ponatur $ay^f x^m dx + by^n x^p dx = dy.$ y determinari poſſe per x quoties $m = \frac{fp + f - p - n}{n - 1}$, nempe ſi c fuerit radix huius æquationis $bc^{n-1} + ac^{f-1} + \frac{p-m}{n-f} = 0.$ eſſe $y = cx^{\frac{-p-1}{n-1}}$ qui caſus omnium facillimus eſt. Deinde datis 30. Iul. A. 1721. litteris ad Cl. Nicol. Bernoullium, tres alios ca-

ſus integrabiles æquationis $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$. detexi, nimirum (1) ſi ponatur $n = 1, p = -1$ eſſe $y = \frac{a}{-b+m+1} + fx^b$ ubi f ſit quantitas conſtans quæcunque. (2) Si $n = 2$, $m = -3p - 4$ eſſe $y = \sqrt{\frac{-a}{b}}\, x^{-2p-2} - \frac{(p+1)}{b} x^{-p-1}$. (3) Si $n = 2, m = \frac{-p-4}{3}$ eſſe $y = 1 : \sqrt{\frac{-a}{b}}\, x^{\frac{2p+2}{3}} - \frac{(p+1)}{3a} x^{\frac{p+1}{3}}$ quas integrationes ut novas placere ſibi teſtatus eſt Vir Cl. in reſponſo quod ad meas dedit; paullo poſt aliis litteris ſignificauit ſe præter caſus mihi obſervatos modum inveniſſe peculiarem ex æquatione $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$ alios quotlibet caſus integrabiles eruendi & pro iis æquationes algebraicas aſſignandi, rem ſimul exemplo confirmavit, poſito nempe $m = \frac{-5p-8}{3}$ eſſe

$$y = \frac{x^{-2p-2} + \left(\frac{p+1}{-b}\right) x^{\frac{-5p-5}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{(p+1)^2}{-3ab} x^{\frac{-4p-4}{3}}}{x^{\frac{-2p-2}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a}} + \frac{(p+1)}{3a} x^{\frac{-p-1}{3}}}$$

Tandem litteris 6. Dec. A. 1721. ad me datis ſtatuit æquationem illam differentialem eſſe integrabilem ſi $m = \frac{-2np - 4n \pm p}{2n \pm 1}$ ubi per p intelligit numerum rationalem, per n vero numerum integrum quemcunque. Atque hæc ipſa eſt formula quam ad ſeparationem indeterminatarum huius æquationis dedit Cl. Daniel Bernoullius in Exercitation. Mathemat. p. 77. ſ. ubi per duo lemmata alternatim caſus omnes methodo perquam ingenioſa & facili deduxit.

Conſideravit autem æquationem huiusmodi $ax^n dx + uudx = bdu$. alteri illi æquivalentem ex qua ſcilicet non ſolum exponens p, ſed etiam uterque coefficiens a vel b pro lubitu in alium quemcunque transmutari poteſt.

Pona-

Ponamus exempli cauſa datam æquationem $cu^g du + fu^h y^2 du = dy$ reducendam eſſe ad hanc formam (A)... $x^m dx - y^2 dx = dy$ ſumatur $u = ex^k$, $z = by$. ubi ſit

$$e = -(h+1)^{\frac{2}{g+h+2}} c^{\frac{-1}{g+h+2}} f^{\frac{-1}{g+h+2}},\ b = \frac{ce^{g+1}}{h+1},\ k = \frac{1}{h+1}$$

fiet $m = \frac{g-h}{h+1}$ vel, ſi reducenda ſit eadem æquatio ad hanc formam (B)... $dx - y^2 x^m dx = dy$ ſumatur $u = ex^k$, $z = by$ ubi ſit $e = -(g+1)^{\frac{2}{g+h+2}} c^{\frac{-1}{g+h+2}} f^{\frac{-1}{g+h+2}}$, $b = \frac{ce^{g+1}}{g+1}$, $k = \frac{1}{g+1}$ fiet $m = \frac{h-g}{g+1}$ ubi obſervandum eſt in æquatione Bernoull. $ax^{\frac{-4n}{2n\mp 1}} dx + y^2 dx = bdy$ caſus omnes exponentis $\frac{-4n}{2n-1}$, ſi n ſit numerus affirmativus, & caſus omnes $\frac{-4n}{2n+1}$ ſi n ſit negativus reduci poſſe ad formulam A, omnes vero caſus exponentis $\frac{-4n}{2n-1}$ ſi n ſit negativus & omnes $\frac{-4n}{2n+1}$ ſi n ſit affirmativus redigi ad formulam B.

Iam poſito $2n - 1 = p$ fiat

$$c = x^{\frac{-2n+1}{p}} \pm Ap\frac{(n-0)}{n+0}x^{\frac{-2n-0}{p}} + Bp\frac{(n-1)}{2n-1}x^{\frac{-2n-1}{p}} \pm Cp\frac{(n-2)}{3n-3}x^{\frac{-2n-2}{p}}$$
$$+ Dp\frac{(n-3)}{4n-6}x^{\frac{-2n-3}{p}} \pm Ep\frac{(n-4)}{5n-10}x^{\frac{-2n-4}{p}} + Fp\frac{(n-5)}{6n-15}x^{\frac{-2n-5}{p}} \pm \&c.$$

$$f = 1 \pm Ap\frac{(n-1)}{n-1}x^{\frac{-1}{p}} + Bp\frac{(n-2)}{2n-3}x^{\frac{-2}{p}} \pm Cp\frac{(n-3)}{3n-6}x^{\frac{-3}{p}}$$
$$+ Dp\frac{(n-4)}{4n-10}x^{\frac{-4}{p}} \pm Ep\frac{(n-5)}{5n-15}x^{\frac{-5}{p}} + F\frac{p(n-6)}{6n-21}x^{\frac{-6}{p}} \pm \&c.$$

leges quibus progrediuntur harum ſerierum termini perſpicuæ ſunt, creſcunt enim omnes numeri in coefficientibus ordine naturali præter ultimos denominatorum qui ſervant progreſſionem triangularium 1, 3, 6, 10, &c. litteræ maiores A, B, C, &c. recepto more indicant coefficientes quæ proxime antecedunt.

His præmiſſis conſidero æquationem generalem

$cu^g du + fu^h y^2 du = dy$ ut iam reductam ad alterutram formularum A vel B & infinitorum illorum caſuum integrationes uno theoremate complector: Æquationis different. $x^{\frac{-(n \pm 2n)}{2n-1}} dx - x^{\frac{(-2n \mp 2n)}{2n-1}} y^2 dx = dy$ (ubi n ſit numerus integer affirmativus) integralis eſt $y = \alpha \gtrless \beta$. Signum $\gtrless$ denotat diviſionem ambiguam, ſi enim in formula æquationis diff. ex ſignis $\mp$ $\pm$, datum fuerit ſuperius (qui eſt caſus formulæ A) ſumendus eſt in integrali diviſor quem indicat angulus a linea ſuperiore ad horizontalem factus nempe β; ſi inferius ſignum in æquatione diff. datum fuerit, ſumatur in integrali diviſor quem inferior linea ad horizontalem aſcendens deſignat ut fiat $y = \frac{\beta}{\alpha}$.

Ne quis vero in uſu huius canonis hæſitet, exemplis nonnullis eundem illuſtrabimus quibus intellectis ulteriores caſus non erunt difficiles.

I. Sit integranda æquatio $x^{-4} dx - y^2 dx = dy$ quæ pertinet ad formulam A, fiet $n = 1$. $p = 1$. $\alpha = x^{-1} \pm x^{-2}$, $\beta = 1$. Ergo integralis quæſita $y = \frac{\alpha}{\beta} = x^{-1} \pm x^{-2}$ unde ſequitur æquationis $dx - y^2 x^{-4} dx = dy$ integralem eſſe $y = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{x^{-1} \pm x^{-2}}$.

II. Sit integranda æquatio $x^{\frac{-8}{3}} dx - y^2 dx = dy$, fiet $n = 2, p = 3$, $y = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{x^{\frac{-3}{3}} + 3x^{\frac{-4}{3}} + 3x^{\frac{-5}{3}}}{1 + 3x^{\frac{-1}{3}}}$, unde ſequitur æquationis $dx - y^2 x^{\frac{-8}{3}} dx = dy$ integralem eſſe $y = \frac{\beta}{\alpha} =$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1\pm 3x^{\frac{-1}{3}}}{x^{\frac{-3}{3}}\pm 3x^{\frac{-4}{3}}+3x^{\frac{-5}{3}}}$$

III. Eodem modo æquationis $x^{\frac{-(6\pm 6)}{5}}dx - y^2 x^{\frac{-(6\mp 6)}{5}}dx = dy$ integralis invenietur

$$y=\alpha \div \beta = \left(x^{\frac{-5}{5}} \pm 5x^{\frac{-6}{5}} + 10x^{\frac{-7}{5}} \pm \frac{25}{3}x^{\frac{-8}{5}}\right)$$
$$\div \left(1 \pm 5x^{\frac{-1}{5}} \pm \frac{25}{3}x^{\frac{-2}{5}}\right)$$

IV. Æquationis $x^{\frac{-(8\pm 8)}{7}}dx - y^2 x^{\frac{(8\mp 8)}{7}}dx = dy$. integralis eſt

$$y=\left(x^{\frac{-7}{7}} \pm 7x^{\frac{-8}{7}} + 21x^{\frac{-9}{7}} \pm \frac{98}{3}x^{\frac{-10}{7}} + \frac{343}{15}x^{\frac{-11}{7}}\right)$$
$$\div \left(1 \pm 7x^{\frac{-1}{7}} + \frac{98}{5}x^{\frac{-2}{7}} \pm \frac{343}{15}x^{\frac{-3}{7}}\right).$$

Quodſi iam progrediamur ad æquationem differentialem uno termino ampliorem $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ (ex qua tamen duæ coefficientium a, b, c, pro lubitu in alias transmutari poſſunt, ut ſupra indicatum fuit) ſimiliter varii ſe offerunt caſus integrabiles quorum nonnullos explicabimus.

I. Si $ax^{\frac{4n\pm 2b\pm 4}{-2n\pm 1}}dx + byx^{-1}dx + cy^2 dx = dy$. æquatio erit integrabilis dato n numero quocunque integro.

Demonſtr.

Ponatur $y = \frac{-(b+1)}{c}x^{-1} + x^{-b-2}u$ transformabitur æquatio data in hanc

$$ax^{\frac{4n+2b+4}{-2n+1}}dx-\left(\frac{b^2+b}{c}\right)x^{-2}dx+bx^{-b-3}udx$$
$$+(b^2+2b+1)x^{-2}dx-(2b+2)x^{-b-3}udx+cx^{-2b-4}u^2dx$$
$$=\left(\frac{b+1}{c}\right)x^{-2}dx+(b+2)x^{-b-3}udx \qquad +x^{-b-2}$$

ſive deſtructis terminis æqualibus, $ax^{\frac{4n+2b+4}{-2n+1}}dx+cx^{-2b-4}u^2dx=x^{-b-2}du$, multiplicentur omnia per x^{+b+2} fit $ax^{\frac{-2nb+b+2}{-2n+1}}dx+cx^{-b-2}u^2dx=du$, tandem ponatur $x=v^{\frac{-1}{b+1}}$. fiet $\frac{-a}{b+1}v^{\frac{4n}{-2n+1}}dv, \frac{-c}{b+1}u^2dv=du$, quam conſtat eſſe integrabilem ſi n fit numerus quicunque integer.

Poteſt etiam ſic demonſtrari: ſit $ax^{\frac{-4f+2b}{2f+1}}dx+byx^{-1}dx+cy^2dx=dy$, (quæ æquatio non differt a priori, ſi ponatur $n=f\pm 1$) fiat $y=x^bu$ mutabitur æquatio in hanc $ax^{\frac{-4f+2b}{2f+1}}dx+cx^{2b}u^2dx=x^bdu$; diviſis omnibus per x^b fit $ax^{\frac{-4f+b-2fb}{2f+1}}dx+cx^bu^2dx=du$. Ponatur $x=z^{\frac{1}{b+1}}$. fiet $\frac{a}{b+1}z^{\frac{-4f}{2f+1}}dz+\frac{c}{b+1}u^2dz=du$, quam conſtat eſſe integrabilem ſi f ſit numerus quicunque integer.

Exempl. 1.

Si $m=2b$ (cui reſpondet $n=1$) hoc eſt, ſi æquatio data ſit $ax^{2b}dx+byx^{-1}dx+cy^2dx=dy$

erit $y=(-a:c)^{\frac{1}{2}}x^b$.

Exempl. 2.

Si $m=\frac{2b-4}{3}$, (cui reſpondet $n=-2$) hoc eſt ſi æqua-

quatio data ſit $ax^{\frac{2b-4}{3}}dx+byx^{-1}dx+cy^{2}dx=dy$.

erit $y=\frac{1}{(-c:a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{-b+2}{3}}-\frac{(b+1)}{3a}x^{\frac{-2b+1}{3}}}$

Exempl. 3.

Si $f=1$ hoc eſt, ſi æquatio data ſit $ax^{-2b-4}dx+byx^{-1}dx+cy^{2}dx=dy$, erit $y=(-a:c)^{\frac{1}{2}}x^{-b-2}-\frac{(b+1)}{c}x^{-1}$. atque ſic in ſimilibus exemplis determinari poterit valor y per x & conſtantes; ſingularis autem caſus eſt ubi m non determinatur per coefficientes datas, ſcilicet ſi fuerit $ax^{-2}dx+byx^{-1}dx+cy^{2}dx=dy$, ubi fit $y=\left(\frac{-(b+1)+\sqrt{(b+1)^{2}-4ac}}{2c}\right)x^{-1}$. Gabriel Manfredius in tract. de conſtructione æquationum differ. primi gradus p. 167. art. 105. cum incidiſſet in æquationem $nx^{2}dx-ny^{2}dx+x^{2}dy=xydx$. *hæc*, inquit, *æquatio non apparet quomodo conſtruibilis ſit, neque enim videmus quomodo illam integremus, nec quomodo indeterminatas ab invicem ſeparemus*. Sed integrari poteſt per formulam noſtram hoc modo: dividatur æquatio per x^{2}, fiet $ndx-x^{-1}ydx-nx^{-2}y^{2}dx=dy$, poſitoque $x=z^{-1}$ erit $-nz^{-2}dz+z^{-1}ydz+ny^{2}dz=dy$. Ergo $y=\left(\frac{-1+\sqrt{n^{2}+1}}{n}\right)z^{-1}$.

II.

Si æquatio A... $ax^{p-1}dx+byx^{p}dx+cy^{2}dx=dy$ integrari poteſt, erit etiam æquatio

B... $\frac{(abp+a^{2}c)}{pp}x^{2p}+\frac{(2ac+bp)}{p}x^{p}udx+cu^{2}dx=du$

integrabilis.

Demonſtr.

Demonſtratio.

Ponatur $y = \frac{a}{p}x^p + u$, fiet

$$\begin{aligned} ax^{p-1}dx &- - - ax^{p-1}dx \\ byx^p dx &= \frac{ab}{p}x^{2p}dx + bux^p dx \\ cy^2 dx &= \frac{a^2c}{p^2}x^{2p}dx + \frac{2ac}{p}ux^p dx + cu^2 dx \\ = dy &= du + ax^{p-1}dx \end{aligned}$$

quæ eſt ipſa æquatio B. ſi pro u ponatur y, atque ſimiliter, ſi aliqua æquatio integrabilis revocari poſſit ad B demonſtratum eſt æquationem A eſſe integrabilem.

Exempl. I.

Cum æquatio $ax^{p-1}dx + byx^p dx + \frac{b}{a}y^2 dx = dy$, ſit integrabilis (fit enim $y = \frac{-a}{b}x^{-1}$.) erit etiam $\left(\frac{ab+abp}{pp}\right)x^{2p}dx + \frac{(2b+bp)}{p}yx^p dx + \frac{b}{a}y^2 dx = dy$ integrab. quæ æquatio revocari poteſt ad hanc formam

$$ax^{\frac{(b^2-4ac)\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{ac}}dx + byx^{\frac{(b^2-4ac)\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2ac}}dx$$

$$+ cy^2 dxdy.$$

unde eruitur $y \frac{(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})}{2c} x^{\frac{(b^2-4ac)\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} - \frac{c}{1}x^{-1}$.

Exempl. 2.

Quoniam æquatio $ax^{\frac{-2b-ac}{b}}dx + byx^{\frac{-b-ac}{b}}dx$

$$+ cy^2 dx = dy$$

eſt integrabilis, (fit enim $y = \frac{-b}{c}x^{\frac{-b-ac}{b}} - \frac{1}{c}x^{-1}$)

erit

erit etiam $\frac{-ab^3}{(b+ac)^2} x^{\frac{-2b-2ac}{b}} dx + \frac{abc-b^2}{(-b+ac)} x^{\frac{-b-ac}{b}} udx$

$$+ cu^2 dx = du.$$

integrabilis & $u = -\frac{-bb}{bc+ac^2} x^{\frac{-b-ac}{b}} - \frac{1}{c} x^{-1}.$

Exempl. 3.

Quoniam ex æquatione $ax^{\frac{ac-2b}{b}} dx + byx^{\frac{ac-b}{b}} dx$ $+ cy^2 dx = dy$, fit $y = \frac{1}{\frac{ac-b}{ab} x^{\frac{-ac+b}{b}} - \frac{b}{a} x}$

Erit etiam $\frac{(2a^2c-ab)b^2}{(ac-b)^2} x^{\frac{2ac-2b}{b}} dx + \frac{(3abc-b)^2}{ac-b} x^{\frac{ac-b}{b}} udx$

$$+ cu^2 dx = du,$$

integrabilis & $u = \frac{b^2}{ac-b} x^{\frac{ac}{b}}$.

III.

In quibuscunque caſibus integrari poteſt
A — — $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$.
poterit etiam integrari
B — — $\frac{-c}{m+1} v^{\frac{-m}{m+1}} dv \frac{-bu}{m+1} v^{\frac{p-m}{m+1}} dv \frac{-a}{m+1} u^2 dv = du$.

Demonſtr.

Ponatur $y = u^{-1}$ mutabitur æquatio A in
$ax^m dx + bu^{-1} x^p dx + cu^{-2} dx = -u^{-2} du$.
Hæc multiplicetur per $-u^{-2}$ fiet $-cdx - bux^p dx - ax^m$ $u^2 dx = du$. poſitoque $x = v^{\frac{1}{m+1}}$ prodibit
B — — $\frac{-c}{m+1} v^{\frac{-m}{m+1}} dv + \frac{-b}{m+1} uv^{\frac{p-m}{m+1}} dv \frac{-a}{m+1} u^2 dv = du$.

 Exempl.

Exempl. I.

Quoniam æquatio $ax^{\frac{-2b-ac}{b}}dx+byx^{\frac{-b-ac}{b}}dx+cy^2dx=dy$ eſt integrabilis, ut antea dictum, poterit etiam integrari $\frac{bc}{ac+b}v^{\frac{ac+2b}{-ac-b}}dv+\frac{b^2}{ac+b}v^{\frac{b}{-ac-b}}udv+\frac{ab}{ac+b}u^2dv=du$. quæ reduci poteſt ad

$ax^{\frac{-ac-2}{ac+1}}dx+byx^{\frac{-1}{ac+1}}dx+cy^2dx=dy$.

Exempl. 2.

Quoniam æquatio $ax^{\frac{ac-2b}{b}}dx+byx^{\frac{ac-b}{b}}dx+cy^2dx=dy$ eſt integrabilis (vid. ſup. Ex. 3.) erit etiam

$\frac{-cb}{ac-b}x^{\frac{2b-ac}{ac-b}}dx-\frac{b^2}{ac-b}ux^{\frac{b}{ac-b}}dx-\frac{ab}{ac-b}u^2dx=du$.

quæ revocari poteſt ad hanc formam

$ax^{\frac{2-ac}{ac-1}}dx+byx^{\frac{1}{ac-1}}dx+cy^2dx=dy$ integrabilis.

Exempl. 3.

Quoniam $ax^{-2}dx+byx^{\frac{-1\pm\sqrt{1-4ac}}{2}}dx+cy^2dx=dy$ eſt integrabilis, fit enim $y=\left(\frac{-1\pm\sqrt{1-4ac}}{2c}\right)x^{-1}$

$\frac{-b}{c}x^{\frac{-1\pm\sqrt{1-4ac}}{2}}$ erit etiam integrabilis.

$cx^{-2}dx+bux^{\frac{-3\pm\sqrt{1-4ac}}{2}}dx+ay^2dx=dy$

& fiet $y=1:\left(\frac{-1\pm\sqrt{1-4ac}}{2a}x-\frac{b}{a}x^{\frac{1\mp\sqrt{1-4ac}}{2}}\right)$

IV.

Si in æquatione generali ponatur $c=0$ æquatio erit integrabilis dato $\frac{m-p}{p+1}$ numero integro affirmativo, poteſt autem hæc æquatio ad ſimpliciores terminos reduci, ſi po-

ſi ponatur $x = z^{\frac{1}{p+1}}$, fiet enim $az^{\frac{m-p}{p+1}}dz + bydz = dy$. Ergo $ax^n dx + bydx = dy$ erit integrabilis ſi n ſit numerus integer poſitivus.

Exempla.

Si $n = 1$ erit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{a}{bb}$

Si $n = 2$ erit $y = \frac{-a}{b}x^2 - \frac{2ax}{bb} - \frac{2a}{b^3}$

Si $n = 3$ erit $y = \frac{-a}{b}x^3 - \frac{3a}{bb}x^2 - \frac{6a}{b^3}x - \frac{6a}{b^4}$

& generatim dato n numero quocunque erit $y =$ ſeriei infinitæ

$$\frac{-a}{b}x^n - \frac{an}{b^2}x^{n-1} - \frac{an(n-1)}{b^3}x^{n-2} - \frac{an(n-1)(n-2)}{b^4}x^{n-3} - \&c.$$

quæ toties abrumpitur quoties n eſt numerus integer poſitivus.

Si vero ponamus

$y = \alpha x^e u + \beta x^f u^2 + \gamma x^g u^3 + \delta x^h u^4 + \varepsilon x^k u^5 + \&c.$
transmutabitur æquatio $ax^m dx + bydx = dy$ in
$ax^m dx + b\alpha x^e udx + b\beta x^f u^2 dx + \&c.$
$= (\alpha x^e + 2\beta x^f u + 3\gamma x^g u^2 + \&c.)du +$
$(\alpha x^{e-1} u + \beta f x^{f-1} u^2 + \gamma g x^{g-1} u^3 + \&c.)\, dx$. quæ ſimiliter erit integrabilis ſi m ſit numerus integer poſitivus ; ad quam formam reduci poſſunt plurimi caſus particulares quorum integratio ſine hoc theoremate non facile ſuccederet.

Exempl. I.

Sit data æquatio $x^3 dx + (2x-1)udx - 2u^2 dx = (x-2u)du$ hoc eſt $\alpha = a = e = 1$. $f = \gamma = \delta = \&c. = 0$. $\beta = -1$. $b = 2$. $m = 3$. habebitur $u = \frac{x \pm \sqrt{2x^3 + 4x^2 + 3x + 3}}{2}$

Exempl. 2.

Sit æquatio data

$$ax^2dx+\frac{2}{5}uxdx-\frac{b}{5}ux^2dx+u^3dx-bu^3xdx-bu^5dx$$
$$=-\frac{1}{5}x^2du-3xu^2du-5u^4du.$$

erit $\alpha=-\frac{1}{5}$. $\beta=0$. $\gamma=-1$. $\delta=0$. $\varepsilon=-1$. & reliqui coefficientes $=0$. $e=2$. $g=1$. $k=0$. $m=2$. quam ob rem ipſa æquatio dextre tractata perducetur ad

$$u=\left(\frac{(-ab^2x^2-2abx-2a)}{2b^3}\pm\sqrt{\frac{(ab^2x^2+2abx+2a)^2}{4b^6}+\frac{x^5}{3125}}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$+\left(\frac{(+ab^2x^2+2abx+\pm 2a)}{2b^3}\pm\sqrt{\frac{(ab^2x^2+2abx+2a)^2}{4b^6}+\frac{x^5}{3125}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

V.

Æquatio $ax^{\frac{-2ac-b}{b}}dx+bx^{\frac{-2ac}{b}}udx+cu^2dx=du$ eſt integrabilis, ſi $\frac{\mp ac}{2ac-b}$ ſit numerus integer.

Demonſtr.

Si ponatur $u=y-\frac{b}{2c}x^{\frac{-2ac}{b}}$ fiet

$$\left\{\begin{array}{l} ax^{\frac{-2ac-b}{b}}dx \\ +bx^{\frac{-2ac}{b}}udx=by^{\frac{-2ac}{b}}dx\frac{-b^2}{2c}x^{\frac{-4ac}{b}}dx. \\ +cu^2dx=-by^{\frac{-2ac}{b}}dx+\frac{b^2}{4c}x^{\frac{-4ac}{b}}dx+cy^2dx \end{array}\right.$$
$$=du=ax^{\frac{-2ac-b}{b}}dx\quad - - - - - - \quad +dy.$$

hoc eſt, omiſſis terminis qui ſeſe deſtruunt,

$$\frac{-b^2}{4c}x^{\frac{-4ac}{b}}dx+cy^2dx=dy.$$

quam conſtat eſſe integrabilem ſi $\frac{\mp ac}{2ac-b}$ ſit numerus integer.

VI.

VI.

Æquatio $ax^{2e}dx + bux^{e}dx + \frac{b^2}{4a}u^2 dx = du$ eſt integrabilis ſi $\frac{\pm e \mp 1}{2e+2}$ ſit numerus integer.

Demonſtr.

Si ponatur $u = y - \frac{2a}{b}x^{e}$ fiet

$$\left\{\begin{array}{l} ax^{2e}dx \\ + bux^{e}dx = -2ax^{2e}dx + byx^{e}dx \\ + \frac{b^2}{4a}u^2 dx = ax^{2e}dx - byx^{e}dx + \frac{b^2}{4a}y^2 dx \end{array}\right.$$

$$= du = -\frac{2ae}{b}x^{e-1}dx \;-\;-\;-\;-\;-\; + dy.$$

ſeu omiſſis terminis qui ſeſe deſtruunt $\frac{2ae}{b}x^{e-1}dx + \frac{b^2}{4a}y^2 dx = dy$ quam conſtat eſſe integrabilem ſi $\frac{\pm e \mp 1}{2e+2}$ ſit numerus integer.

ANALYSIS AEQVATIONVM QVARVNDAM DIFFERENTIALIVM,

Auctore

Nicolao Bernoulli Ioh. F.

I.

1\. Iul. 1726 AEquationes differentiales quæ indeterminatas habent ad ſimplices potentias elevatas, ſi ex tribus conſtent terminis, omnes ad hanc formulam reduci poſſunt per diviſionem

(A) $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$

& ſimplicius ad hanc

(B) $ax^m y^n dx + by^q dx = dy$

acquirit enim æquatio (A) formam æquationis (B) ſi loco x^{p+1} ponatur ſimplex quædam littera: Denique ſi æquatio (B) dividatur per y^n, conſidereturque y^{-n+1} ut quantitas ſimplex, apparet poſſe æquationi (B) aliam conciliari formam ſimpliciorem, ſcilicet talem

(C) $ax^m dx + by^q dx = dy$.

II Si quis generaliter æquationem (C) ad algebraicam reducere vel ſaltem in aliam transmutare poſſet ab indeterminatarum commiſtione liberam rem faceret meo iudicio utiliſſimam omnique laude dignam. Nemo autem, quantum ſcio, hactenus fuit, qui id præſtiterit: Illud tamen a Cel. Hermanno, Patreque meo iam monſtra-

ſtratum fuit, admittere æquationem (C) indeterminatarum ſeparationem, quoties $q=1$, hancque reſtrictionem quodammodo compenſarunt eo, quod loco x^m in primo termino poſſit accipi quæcunque functio ipſius x. Idem poſtea ego quoque inveni diverſa via, quam in ſequenti §. exponam. Tametſi enim viri allegati methodos ſuas publico non denegarint, puto tamen poſſe rei analyticæ aliquid emolumenti accedere, quotiescunque nova analyſi antea nemini uſitata theoremata eruuntur.

III. Sit ergo æquatio (D) $X\,dx + by\,dx = dy$, ſitque c ille numerus, cuius logarithmus eſt unitas: ponatur $y = c^{bx} z$ & $dy = bc^{bx} z\,dx + c^{bx} dz$; erit ergo $X\,dx + bc^{bx} z\,dx = bc^{bx} z\,dx + c^{bx} dz$, vel $X\,dx = c^{bx} dz$; vel (F) $dz = c^{-bx} X\,dx$, in qua poſteriori æquatione indeterminatæ iam ſunt a ſe invicem ſeparatæ.

IV. Sunt præterea caſus infiniti, in quibus æquatio (F) ad algebraicas per integrationes reduci poteſt, quando ſcilicet X denotat potentiam quandam rationalem ipſius x; id eſt quando poſito b numero integro & poſitivo habetur $X = x^b$, ita ut deinde ſit (G) $dz = c^{-bx} x^b dx$. Eſt autem $c^{-bx} x^b dx = c^{-bx} x^b dx - \frac{b}{b} c^{-bx} x^{b-1} dx + \frac{b}{b} c^{-bx} x^{b-1} dx - \frac{b.\overline{b-1}}{bb} c^{-bx} x^{b-2} dx + \frac{b.\overline{b-1}}{bb} c^{-bx} x^{b-2} dx - \frac{b.\overline{b-1}.\overline{b-2}}{b^3} c^{-bx} x^{b-3} dx + \frac{b.\overline{b-1}.\overline{b-2}}{b^3} c^{-bx} x^{b-3} dx$ &c. quod ſi b ſit numerus integer poſitivus abrumpitur hæc ſeries, quæ talis eſt indolis ut ſemper bini termini integrari poſſint; mutabitur ergo æquatio (G) poſt integrationem non omiſſa conſtante a in hanc aliam (H) $z + a$

$=$—

$= -\frac{1}{b}c^{-bx}x^h - \frac{h}{bb}c^{-bx}x^{h-1} - \frac{h.\overline{h-1}}{bbb}c^{-bx}x^{h-2} - \frac{h.\overline{h-1}.\overline{h-2}}{bbbb}$ $c^{-bx}x^{h-3}$ &c. Pro reductione ulteriori æquationis (H) ſubſtituemus pro z valorem ipſius $c^{-bx}y$ (nam ab initio §. 3. poſitum fuit $y = c^{bx}z$) & ſic habebitur æquatio talis (L) $c^{-bx}y + a = -\frac{1}{b}c^{-bx}x^h - \frac{h}{bb}c^{-bx}x^{h-1} - \frac{h.h-1}{bbb}c^{-bx}x^{h-2}$ $-\frac{h.h-1.h-2}{bbbb}c^{-bx}x^{h-3}$ &c. quæ nimirum ſatisfacit generaliter æquationi (D) §. 3. poſito $X = x^h$. Eſt vero æquatio finalis (L) mediæ naturæ algebraicam inter & differentialem, ſcilicet eſt ex ordine æquationum exponentialium. Sed omnino algebraica fit, ſi conſtans ad libitum aſſumenda a ponatur $= o$; tunc enim tota æquatio dividi poteſt per c^{-bx} & obtinetur $y = -\frac{1}{b}x^h - \frac{h}{bb}x^{h-1} - \frac{h.\overline{h-1}}{bbb}x^{h-2}$ $-\frac{h.h-1.h-2}{bbbb}x^{h-3}$ &c. quæ æquatio pure algebraica etiam ſatisfacit æquationi differentiali $x^h dx + bydx = dy$, ſed illam non totam complectitur, quod pariter iam Celeb. Chriſtianus Goldbach alia via uſus acute obſervavit.

V. Redeo ad æquationes §. 1. expoſitas, quarum una ſemper ad alteram reduci poteſt. Dicendum ergo æquationem (A) non minus quam aliam (C) ſeparationem indeterminatarum admittere generaliter, modo ſit $q = 1$; hic id notari meretur, quod ſi vel in unico alio caſu idem præſtari poſſet, ſuccederet res generaliſſime; ſolus caſus $q = 1$ talis eſt: ut non mutari poſſit in alium. Id ut intelligatur plenius ponemus verbi gratia in æquatione hac $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$, poſſe ſemper indeterminatas ſeparari ſi $q = 3$; multiplicentur termini per y^r & orietur $ax^m y^{n+r} dx + bx^p y^{3+r} dx = y^r dy$; ponatur $y = z^s$ ita ut habeatur $ax^m z^{ns+rs} dx + bx^p z^{3s+rs} dx = sz^{rs+s-1} dz$; dividа-

vidatur æquatio per sz^{rs+s-1} & erit $\frac{a}{s} x^m z^{ns-s+1} dx + \frac{b}{s} x^p z^{2s+1} dx = dz$, quæ iam æquatio non minus generalis eſt, quam ipſa æquatio (A).

VI. Conſiderabimus impoſterum æquationem (C) ad quam omnes §. 1. expoſitæ reduci poſſunt. Si in illa conſideretur q tanquam numerus datus, inveniri poterunt valores ipſius m, ut formula reductionem deſideratam admittat. Ita v. gr. nemo non videt poſſe ſemper eſſe $m = o$; facile quoque apparet, poſſe idem præſtari, ſi ſit $m = \frac{q}{1-q}$, quia ponendo $y = z^{1:1-q}$ mutatur hæc æquatio $ax^{q:1-q} dx + by^q dx = dy$ in hanc $ax^{q:1-q} dx + bz^{q:1-q} dx = \frac{1}{1-q} z^{q:1-q} dz$ cuiusmodi æquationum homogenearum reductionem Pater meus iam diu docuit: Poterunt forſan alii valores præter dictos unicuique obvios erui, an vero infiniti dubito, niſi cum $q = 2$, quem ſolum caſum hanc prærogativam habere ſuſpicor, dignum proin particulari Geometrarum attentione. Commendatus publice examini eorum fuit a Cl. Com. Riccato in Actis Lipſ. Suppl. Tom. 8. p. 73. Nemo autem obſervata ſua cum publico communicavit præter fratrem meum, qui oſtendit modum reducendi æquationem Riccatianam ad indeterminatarum ſeparationem usque, quoties $m = \frac{-4c}{2c+1}$, ubi c poteſt denotare quemcunque numerum integrum; & nuperrime etiam coram Societate monſtravit Cl. Chriſtianus Goldbach methodum inveniendi æquationes algebraicas æquationi Riccatianæ in certa hypotheſi ſatisfacientes: Ultimum hoc nos ambo primi præſtitimus ante hos quinque annos & certe fecimus hac in re, quod prima fronte impoſſibile videri poterat eo, quod generaliter caſus æquationis modo defi-

niti pendeant omnes a quadratura circuli vel hyperbolæ, ita ut non deſit ſuſpicioni locus, æquationes algebraicas exhiberi non poſſe niſi ſimul vel circuli vel hyperbolæ quadratura innoteſcat. Dabo in ſequentibus paradoxi ſolutionem, nunc ipſam analyſin aggrediar.

VII. Cum fuerit $q = 2$ fit æquatio (C) talis

$$(M)\ ax^m dx + byydx = dy$$

ponatur $m = o$, & erit (N) $adx + byydx = dy$, vel $dx = \frac{dy}{a + byy}$, cuius æquationis conſtructio pendet a quadratura circuli, ſi ambæ quantitates a & b ſint affirmativæ vel ambæ negativæ, ſecus poſtulat quadraturam hyperbolæ. Nunc oſtendam quomodo ex caſu $m = o$ infiniti alii deduci poſſint. In æquatione (M) ponatur $x = (m + 3)^{2 : \overline{m+2}} p^{1 : \overline{m+3}}$ & $y = -\frac{1}{b} \times (m+3)^{-2 : \overline{m+2}} p^{-1 : \overline{m+3}} - \frac{a}{b} \times (m+3)^{m : \overline{m+2}} p^{-2 : \overline{m+3}} q^{-1}$, atque ſic obtinebitur nova æquatio priori plane ſimilis, nempe talis

$$(N)\ a p^{\overline{-m-4} : \overline{m+3}} dp + bqqdp = dq.$$

Ex hac autem ſimilitudine æquationum (M) & (N) concluditur quod quoties m eſt caſus ſeparabilitatis, ſit quoque $\frac{-m-4}{m+3}$ talis: hincque ſtatim infiniti oriuntur; ſi enim $m = o$, fit $\frac{-m-4}{m+3} = \frac{-4}{3}$; dein ſi $m = \frac{-4}{3}$, fit $\frac{-m-4}{m+3} = \frac{-8}{5}$, & ſic porro: omnes hi caſus $m = o$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{8}{5}$ &c. continentur in hac formula generali $m = \frac{-4n}{2n+1}$ intelligendo per n numerum integrum.

VIII. Ex præcedenti §. patet poſſe hanc æquationem $ax^{-4n : \overline{2n+1}} dx + byydx = dy$ ſemper geometrice ope quadraturæ circuli vel hyperbolæ conſtrui, quoties n eſt numerus integer, quia ſemper poteſt reduci ad hanc æquationem $a\,ds + bttds = dt$; ſed pro hac reductio-

ductione requiruntur & plures ſubſtitutiones, quo maior fuerit numerus n, unde non niſi magno labore deſiderata reductio obtinetur, niſi lex generalis obſervetur pro requiſitis ſubſtitutionibus, qua mediante dein unica ſubſtitutione res perfici poteſt. Cæterum me non monente patet, quod ſicuti ex æquatione (M) deducta fuit altera (N) ita reciproce ex hac illa deduci poſſit, unde ſi $\frac{-m-4}{m+3}$ ſit caſus ſeparabilitatis erit quoque m talis; hinc novus eruitur caſus & ope huius infiniti alii; fiat ergo $\frac{-m-4}{m+3} = o$ & erit $m = -4$; dein fiat $\frac{-m-4}{m+3} = -4$, & erit $m = -\frac{8}{3}$; & ſic continue alii ſeparabilitatis caſus eruuntur, qui continentur in hac formula generali $m = \frac{-4n}{2n-1}$, quam combinando cum priori ſit denique $m = \frac{-4n}{2n \mp 1}$. Ita quoque invenerunt Cl. Goldbach & frater meus præter ipſum problematis Auctorem; nemo autem noſtrum alios inſuper reductionis caſus invenire potuit.

IX. Hactenus methodum tradidi, qua apparet eſſe formulam $ax^{-4n:2n\pm 1}dx + byydx = dy$, ſeparabilem quoties n eſt numerus integer, atque eandem exprimere æquationem ad curvas quarum conſtructio dependet vel a quadratura circuli vel a quadratura hyperbolæ. In hac re id notatu dignum puto, quod ſi a & b ſint quantitates altera negativa altera affirmativa, ſemper æquationes algebraicæ dari poſſunt pro eadem illa æquatione modo allegata, cuius conſtructio poſtulat quadraturam hyperbolæ: Neque tamen exinde fluit (quod prima fronte videtur) hyperbolæ quadratura: Demonſtrare autem poſſum, ſolas æquationes differentiales a quadratura hyperbolæ pendentes tales eſſe poſſe, ut contineant æquationes partim algebraicas, partim non algebraicas: Exem-

 plum

plum iam ſuperius dedi §. 4. ubi demonſtravi æquationem $x^h dx + b y dx = dy$, poſito $h =$ numero integro poſitivo continere æquationes partim algebraicas partim a quadraturæ hyperbolæ pendentes ; iam alterum exemplum apponam atque æquationes algebraicas dabo pro hac æquatione differentiali $-ax^{-4n:\,2n\pm 1} dx + byy dx = dy$.

X. In §. 7. monſtravi omnes ſeparabilitatis caſus expreſſos per $\frac{-4n}{2n\pm 1}$ ita inter ſe cohærere ut ſemper unus ad alterum reduci poſſit , quapropter ſi in unico caſu æquatio algebraica deſiderata erui poteſt, poterit per reductiones idem præſtari in omnibus reliquis. Inquiram itaque æquationem algebraicam ſatisfacientem caſui particulari huius æquationis $ax^m dx + byy dx = dy$. Sit æquatio algebraica talis

$$y = \alpha x^n + \beta x^{n+1} + \gamma x^{n+2} - - - + \delta x^{n+p}$$

per α, β, γ &c. intelligo coefficientes incognitas ; & per n & p itidem numeros determinandos pro exponentibus indico ; determinabo primo n & p: ſubſtituantur in æquatione propoſita differentiali valores pro yy & dy, & habebit æquatio reſultans neglectis coefficientibus talem formam

$$x^m dx + x^{2n} dx + x^{2n+1} dx + x^{2n+2} dx - - + x^{2n+2p} dx$$
$$= x^{n-1} dx + x^n dx + x^{n+1} dx - - - + x^{n+p-1} dx.$$

ut hæc æquatio fiat identica , efficiam ut primus & ſecundus terminus ſint homogenei , dein quoque ut tertius ſit talis reſpectu primi ab altera parte , nec non ultimus ab una parte reſpectu ultimi ab altera parte ; ita fient omnes intermedii homogenei ; exinde obtinentur huiusmodi æquationes $m = 2n$, $2n + 1 = n - 1$. & $2n + 2p = n + p - 1$; vel $m = -4$, $n = -2$ & $p = 1$; hi valores indicant, poſſe

æqua-

æquationem talem $y = \alpha x^{-1} + \beta x^{-2}$ ſatisfacere huic æquationi differentiali $-ax^{-4}dx + byydx = dy$, modo α & β recte definiantur; definientur autem ex comparatione æquationum poſt ſubſtitionem valorum pro yy & dy; fiet nimirum $\alpha = -\frac{1}{b}$ & $\beta = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$; habemus itaque pro hac æquatione differentiali (P) $-ax^{-4}dx + byydx = dy$, hanc algebraicam (Q) $y = -\frac{1}{bx} \pm \frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$. Si porro fiant ſubſtitutiones §. 7. indicatæ tam in æquatione differentiali (P) quam in integrali (Q) poterunt ſucceſſive æquationes algebraicæ erui pro ſingulis caſibus huius æquationis generalioris $-ax^{-4n:\,2n\mp1}dx + byydx = dy$: Imo ſi recte obſervetur lex ſubſtitutionum, in ſeriem redigentur omnes illæ æquationes algebraicæ magis minusve compoſitam pro ratione magnitudinis numeri n; verum fatendum eſt, magnam attentionis perſpicaciæque vim pro illa obtinenda requiri; felicem tamen ſucceſſum expertus eſt Cl. Chriſt. Goldbach. (vid. p. 187): hanc ſeriem conſiderans, ut & naturam ſubſtitutionum pro ſeparationis negotio requiſitarum, inducor ut credam plane impoſſibile eſſe, ſemper in æquatione generali Riccatiana ($ax^m ax + byydx = dy$) æquationes algebraicas eruere vel ſeparare indeterminatas; cæterum cur in caſu particulariori $m = \frac{-4n}{2n\pm1}$, neceſſe ſit, ut a & b affirmative ſumtæ habeant ſigna diverſa liquet ex eo, quod in æquatione algebraica (Q) habeatur $\sqrt{\frac{a}{b}}$ quæ ſecus fieret imaginaria; confirmatur hinc quod dixi §. 9. ſolas æquationes quæ pendent a quadratura hyperbolæ poſſe partim eſſe pro curvis algebraicis, partim pro tranſcendentibus.

XI. Hæc iam inveneram cum Venetiis agerem eademque cum fratre Daniele per litteras communicaveram,

ram, qui alia methodo æquationes illas algebraicas directe, id eſt, integrando eruit, poſtquam prius iam caſus ſeparabilitatis reperiſſet: tranſcribam hic ipſius verba in latinum ſermonem verſa excerpta ex litteris, quas Baſilea ad me dedit. „ Libenter, inquit, intellexi ex ultimis tuis „ Te dare poſſe æquationes algebraicas pro æquatione „ Riccatiana $-ax^{-4n:\,2n\pm1}dx+byydx=dy$; hoc ego minus „ fieri poſſe putaſſem; ſed eius rei certior a Te factus „ mox idem inveni; mitto Tibi methodum meam, quo „ illam cum Tua comparare poſſis. Sit (A) $-ads$ „ $+bttds=dt$; ergo $-ds=\frac{dt}{a-btt}$, & integrando cum ad„ditione conſtantis C, erit $C-s=\frac{\log.\overline{\sqrt{a}+t\sqrt{b}}-\log.\overline{\sqrt{a}-t\sqrt{b}}}{2\sqrt{ab}}$, „ vel ſi n dicatur numerus, cuius logarithmus eſt unitas, „ habebitur (B) $n^{\overline{C-s}\times2\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}+t\sqrt{b}}{\sqrt{a}-t\sqrt{b}}$, eſt ergo æquatio (B) „ identica cum propoſita (A). ponatur in utraque $s=-x^{-1}$ „ & $t=\frac{1}{b}x+xxy$, & erunt æquationes reſultantes adhuc i„denticæ: differentialis quæ prodit talis eſt $-ax^{-4}dx$ „ $+byydx=dy$, altera exponentialis ita ſe habet, ſi recte „ reducatur (D) $n^{(Cx+1)\times2x\sqrt{ab}}=\frac{x+bxxy+\sqrt{ab}}{-x-bxxy+\sqrt{ab}}$; ſed cum C „ ſit quantitas arbitraria & conſtans, faciamus illam infi„nitam & erit primum æquationis exponentialis mem„brum infinitum; oportet ergo ut & alterum ſit ta„le, idque eſt, cum denominator ipſius $=o$, ſeu $-x$ „ $-bxxy+\sqrt{ab}=o$; ſeu $y=-\frac{x+\sqrt{ab}}{bxx}$ ſeu $y=-\frac{1}{bx}+\frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$ „ quæ proin comprehenditur in hac æquatione $-ax^{-4}$ „ $dx+byydx=dy$. Si vero C ponatur quantitas infinita „ negativa, erit primum æquationis (D) membrum $=o$, „ quapropter iam numerator alterius membri debet eſſe „ $=o$, unde $y=-\frac{1}{bx}-\frac{1}{xx}\sqrt{\frac{a}{b}}$, & combinando utrumque va-

„ lorem

valorem ipſius y, habebitur denique $y = -\frac{1}{bx} \pm \frac{1}{xx} \sqrt{\frac{a}{b}}$, quæ „ ultima æquatio plane eadem eſt cum illa, quam mihi „ perſcripſiſti; de reliquis caſibus nihil dico; noſti enim, „ illos per methodum noſtram reductionum facile habe- „ ri ope unius iam inventi. „

C. G.

METHODVS INTEGRANDI AEQVATIONEM DIFFERENTIALEM

$$aydx + bx^n dx + cx^{n-1} dx + ex^{n-2} dx + etc. = dy.$$

ubi n ſit

NVMERVS INTEGER POSITIVVS.

POſtquam Cel. Ioh. Bernoullius demonſtravit, æquationem quamcunque differentialem, in cuius terminis licet x & y permixtæ ſint, ſi modo in quocunque termino eadem reperiatur exponentium ſumma, eſſe integrabilem, patet hoc ipſum theorema ad innumeras alias æquationes, in quibus ſumma exponentium non eſt conſtans per idoneas ſubſtitutiones extendi poſſe, nam ſi v. gr. ſit æquatio

20. *Sept.* 1726.

$$(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \&c.)dx$$
$$+ (lx^2 + mx^3y + nx^4y^2 + \&c.)\, dy = o.$$

vel

$$(ay + bxy^2 + cx^2y^3 + \&c)dx$$
$$+ (lx + mx^2y + nx^3y^2 + \&c.)dy = o.$$

in

in quarum utravis parte ſumma exponentium continuo creſcit, ſola ſubſtitutione $y=z^{-1}$ ad eandem exponentium ſummam revocari poſſunt; & generatim, data æquatio $(ax^{\pi}+bz^{\tau}x^{\pi-1}+\&c,)dx$

$$+(mx^{\pi}z^{\tau-1}+nx^{\pi-1}z^{2\tau-1}+px^{\pi-2}z^{3\tau-1}+\&c.)dz=0.$$

ad æqualem exponentium ſummam reducitur ſi fiat $z=y^{\frac{1}{\tau}}$.

Præterea licet huiusmodi ſubſtitutione quæ omnium facillima eſt non obtineatur reductio quæſita ad æqualem ſummam exponentium, non illico exiſtimandum eſt reductionem nullam ſuccedere, fieri enim poteſt ut natura terminorum ſubſtitutiones magis complicatas poſtulet, ſic v. gr.

$$adx+bdy+cxdx+exdy+fydx+gydy=0.$$

indiget his ſubſtitutionibus

$$x=z+\frac{bf-ag}{cg-ef}$$

$$y=u+\frac{ae-bc}{cg-ef}$$

ut redigatur ad formam

$$(cz+fu)dz+(ez+gu)du=0.$$

Æquatio

$$\left.\begin{array}{ll} axdx & +ecxdz \\ +bcz & +2exz \\ +bz^2 & +e^2z \\ & +3cz^2 \\ & +2z^3 \end{array}\right\}=0$$

indiget ſubſtitutione

$$z=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4y}}{2}.$$

ut redigatur ad formam

$$axdx+bydx+exdy+ydy=0.$$

Theo-

Theorema vero, quod iam proponimus in hoc cum Bernoulliano convenit, quod nullo terminorum numero, nulla coefficientium determinatione limitetur, ſed eo differt, quod non requirat conſtantem ſummam exponentium in uno quovis termino, neque ad eandem reduci poſſit.

Ut oſtendamus æquationem noſtram in quocunque caſu non ſolum ſeparabilem eſſe, ſed etiam integrabilem, a facilioribus exemplis incipiemus.

Sit $aydx + bxdx + cdx = dy$.

Invenietur $y = -\frac{b}{a}x - \frac{(b+ac)}{a}$

Sit $aydx + bx^2 dx + cxdx + edx = dy$.

erit $y = \frac{-b}{a}x^2 - \frac{(2b+ac)}{aa}x - \frac{(2b+ac+a^2 e)}{aaa}$

Sit $aydx + bx^3 dx + cx^2 dx + exdx + fdx = dy$.

erit $y = \frac{-b}{a}x^3 - \frac{(3b+ac)}{a^2}x^2 - \frac{(6b+2ac+a^2 e)}{a^3}x$

$- \frac{(6b+2ac+a^2 e+a^3 f)}{a^4}$.

Ex quarum coefficientium progreſſione facile eruitur integralis noſtræ æquationis, dato pro n numero quocunque integro poſitivo

$$y = \frac{-b}{a}x^n + \frac{nA-c}{a}x^{n-1} + \frac{(n-1)B-e}{a}x^{n-2}$$
$$+ \frac{(n-2)C-f}{a}x^{n-3} + \&c.$$

ubi litteræ maiores A, B, C, &c. indicant coefficientes terminorum proxime antecedentium.

DE EPICYCLOIDIBVS IN SVPERFICIE SPHAERICA DESCRIPTIS.

Auctore

Iacobo Hermanno.

M Nov. 1726.

TRiginta quatuor iam effluxere anni, ex quo ænigma geometricum de miro opificio teſtudinis quadrabilis Hemiſphæricæ Autore D. *Pio Liſci Poſillo Geometra* Florentiæ exiit in publicum. Sub hoc nomine, quod per anagramma ſignificat *Poſtremo Galilæi Diſcipulo*, *Vincentius Vivianus* Magni Ducis Hetruriæ Mathematicus latere voluit. Is enim impreſſo programmate ænigma ſuum peritioribus Analyſtis examinandum commendavit his verbis: Cuius (ænigmatis) divinatio a ſecretis artibus illuſtrium Analyſtarum vigentis ævi expectatur, quod in Geometriæ pura hiſtoria verſatus, ad tam recondita videatur invalidus.

Ipſum vero ænigma ita habebat: Inter venerabilia olim Græciæ monumenta extat adhuc, perpetuo quidem duraturum, Templum auguſtiſſimum ichnographia circulari ALMAE GEOMETRIAE dicatum, quod teſtudine intus perfecte hemiſphærica operitur: Sed in hac feneſtrarum quatuor æquales areæ (circum ac ſupra baſin hemiſphæræ ipſius diſpoſitarum) tali configuratione am-

amplitudine, tantaque induſtria, ac ingenii acumine ſunt extructæ, ut his detractis, ſuperſtes curva teſtudinis ſuperficies, pretioſo opere muſivo ornata, Tetragonismi vere geometrici ſit capax.

Præſentis ænigmatis enodatio (quod ſpectat ad huius admirabilis fornicis tum conſtructionem expeditiſſimam, tum quadraturam, *Sereniſſ.* FERDINANDO *Magno Principi Etruriæ*, Scientiarum & Nobiliorum Artium *Cultori ac Patrono Generoſiſſimo*, ab eodem ænigmatiſta oblata iam eſt; qui quidem ſimul non dubitat, quin hoc ipſum ænigma a ſingulis litterario in orbe degentibus hodie præclariſſimis Analyſtis ſit ſtatim divinandum, proprias quadrationes impertiendo ſingularis teſtudinis huius tetragonismicæ ab hemiſphæra diſſectæ, & ipſorum peracutas indagines, multiplicesque induſtrias ad hoc unum idemque collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam iacere audent, ſilere diſcant, vel potius maxima cum voce exclament: *oh! unica verorum ſciſcitabilium ſcientia a Divina* in hominum *mente* infuſa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemtis, æterna iſta, quæ ſemper & unicuique ſunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innocuum ſcire perquirat. Hucusque Vivianus.

Ex hoc proponendi modo, & ex eo, quod ad celeberrimos ævi ſui Geometras programma ſuum mitti curavit, facile quis in opinionem venerit, hoc ænigma arduum & difficile ſolutu Autori ſuo viſum fuiſſe; verumtamen cum non dubitarit, quin recentioribus analyſtis ſtatim ſit ſolvendum, forte non tam a difficultate quam ele-

gantia problema hoc ſuum tanti fecit, & credibile quoque eſt, hoc ænigma Præclariſſimo Viro in veterum geometria innutrito & magna diligentia cuncta excutere ſolito plus negotii dediſſe quam aliis Analyſtis, qui methodos infiniteſimales magis in promtu habebant. Illuſtris enim Leibnitius eodem die, quo notitiam problematis nactus eſt, eius ſolutionem invenit, quam peculiari ſcheda deſcriptam & *Magno Etruriæ Principi* inſcriptam proximo curſore Florentiam miſerat, & paulo poſt totidem verbis in Acta Eruditorum 1692. tranſtulit; occurrunt quoque quinque ſolutiones diverſæ, quas *Iac. Bernoulli* in eodem Actorum Anno Menſ. Auguſto exhibuit. Dedit quoque *Walliſius* aliquot ſolutiones in Cap. 192. ſuæ Algebræ. Sed omnium fere elegantiſſimæ videntur eſſe conſtructiones, quas Vivianus ipſe in peculiari opuſculo Italico ſermone Anno 1692. Florentiæ edito, ſed ſine demonſtrationibus, publico impertivit, vid. Act. Erudit. 1694. pag. 207. Demonſtrationes a Viviano ſuppreſſas ex propria penu deprompſit deinceps & dedit P. Abbas *Guido Grandus* in ſingulari opere, quod *problemata Vivanea* inſcripſit. Totius ænigmatis ſolutio eo redit, ut teſtudo iis feneſtris aperiatur, quibus de ſuperficie tota hemiſphærii detractis ut reſidua maneat ſuperficies geometrice quadrabilis, quod infinitis diverſis modis fieri poteſt. Iam olim *Pappus Alexandrinus* Collectionum Libr. 4. Prop. 32. oſtendit, portionem ſphæricæ ſuperficiei quadam ſpirali interceptam, dati cuiusdam trianguli octuplam eſſe; & facile fuit poſteris alias in ſphæræ ſuperficie portiones invenire, quæ datis planis rectilineis æquales eſſent.

Sed difficilius videri poterat problema, ſi loco ſpatio-

tiorum in ſuperficie ſphærica quadrabilium, quærerentur lineæ geometrice *rectificabiles*. Ita ſaltem ſentit *Carol. Erneſtus Offenburgius*, qui in Actis Erudit. 1718. pag. 175. hoc problema propoſuit: *Teſtudinem Hemiſphæricam feneſtris ovalibus perforare, quarum unaquæque peripheriam abſolute rectificabilem habeat*. Utrum hic Autor problema ſuum ſolverit nec ne, de eo mihi nihil conſtat, hoc ſaltim novi, problema non eſſe tantæ difficultatis, quantæ illud eſſe Autori videtur; ſolutio enim facilis manat a conſideratione Epicycloidum Sphæricarum. Quid vero per has Epicycloides intellectum velim, explicatur in definitione ſequenti.

Definitio.

Epicyclois Sphærica eſt curva in ſuperficie ſphærica deſcripta a puncto in peripheria baſis alicuius coni recti aſſumto, dum coni huius perimeter baſis volvitur in circumferentia alicuius circuli immoti, vertice coni in centro ſphæræ (cuius radius æquat latus coni) immoto manente.

Baſis coni dicatur itidem *Circulus generator*, & circulus, ſuper quo circulus generator volvitur, ita ut ſingulæ partes peripheriæ generatoris ſingulis partibus peripheriæ huius ſucceſſive applicentur, dicatur *Circulus immobilis*. Hoc motu planum circuli generatoris conſtanter dato angulo ad planum circuli immobilis inclinatum eſt.

Si conus rectus ABC, cuius baſis eſt circulus HI revolvatur circa verticem ſuum C, ut circumferentia baſis BIAH moveatur in circumferentia BDM alterius circuli BM centro C & radio CB deſcripti, erit circulus HI *generator*, & circulus DM is, qui *immobilis* vocatur, & punctum L in perimetro circuli generatoris re- Fig. 1.

volutione huius circuli ſuper peripheria LDE, deſcribet in ſuperficie ſphærica curvam LFE, quam *Epicycloidem Sphæricam* appello.

Radius Sphæræ in cuius ſuperficie Epicyclois Sphærica deſcribitur, eſt ubique æqualis lateri coni CB.

Non autem neceſſe eſt ut circulus immobilis ſit circulus in ſphæra maximus ut fig. 1. Poteſt etiam eſſe circulus minor, ut fig. 2. circulus ex diametro BS, nam ſi in circumferentia huius circuli, circulus ex diametro AB qui eſt baſis coni recti BAC dicto modo volvatur, ut ſingulæ partes huius ſingulis partibus peripheriæ circuli immobilis ſucceſſive applicentur, punctum deſcribens etiamnunc incedet in Epicycloide in ſuperficie Sphæræ BAS deſcripta, ſive circulus generator, extet ſupra planum circuli immobilis BS, ſive ſubter idem planum depreſſus ſit.

In omni caſu planum circuli generatoris ad planum circuli immobilis dato angulo inclinatum eſt, in fig. 1. angulo ABC, in ſecunda vero angulo ABR, ſi circulus AB ſit ſuper plano BS, vel ſupplemento anguli ABR ſi ſit ſubter plano BR. In omni ex hiſce caſibus longitudo Epicycloidis eſt ad diametrum circuli generatoris in ratione data. Ad id oſtendendum ſequentibus lemmatis opus habemus.

Lemma I.

Fig. 3. Datis lateribus trianguli obliquanguli $be\beta$, nempe βe & be, & angulo intercepto $be\beta$, invenire tertium latus $b\beta$. Fig. 3.

Dicantur $e\beta = p$, $eb = q$, ſinus anguli $be\beta = g$, ſinus complementi $= h$, ad radium $= 1$, eritque latus quæſitum $b\beta = \sqrt{(pp - 2hpq + qq)}$. *Lem-*

Lemma 2.

Si arcus BOL ſemicirculi BLA, in ſua elementa Lm diſtributus intelligatur, erit ſumma omnium BL.Lm, quam ſummam iam uſitato more, per ∫BL. Lm deſignabo, erit inquam ∫BL. Lm=AB. BP, facta nempe AP=AL. Fig. 4. *Fig. 4.*

Nam triangula ſimilia ABL & mLn præbent AB : BL :: Lm : Ln ; ergo BL. Lm=AB. Ln, ergo ∫BL. Lm=∫AB. Ln ; atqui ∫AB. Ln=AB in omnes Ln, omnes vero Ln ſunt =AB−AL (conſtr. =AB—AP)= BP, ergo ∫BL. Lm=AB. BP, Quod erat &c.

Theorema.

Pars Epicycloidis Sphæricæ EL deſcripta a puncto deſcribente L provolutione circuli generatoris HL ſuper immobili EB ex E ad B, eſt ad 2BP, facta AP=AL, ut $\sqrt{(aa-2bab+bb)}$ ad a, ſi nempe radius circuli BE, hoc eſt BC ſit =a, radius BG circuli HL =b, ac coſinus inclinationis circuli huius ad circulum immobilem =b, ad radium =1.

Per B ducatur tangens BV circuli immobilis BE, & hæc tanget etiam circ. generatorem HL in eodem puncto B. Intelligantur in circ. generatore & in circulo immobili duo arculi indefinite parvi & æquales Bβ & Bb, ductaque ex b in BV normali be, iungatur βe, eritque angulus βeb menſura inclinationis plani HL ad planum BEC circuli immobilis. His poſitis

Si circulus generator HL promoveatur, lineola Bβ rotabitur circa punctum B usque dum cadat ſuper Bb, interea vero deſcribet BL ſectorem LBl ſimilem ſectori Bβb, in quo ſectore arculus Ll eſt elementum Epicy-

cloi-

cloidis hoc motu genitum, habemus ideo BL : Ll :: $B\beta$: $b\beta$; vel $Ll.\,B\beta = BL.\,b\beta$.

Iam dicendo radium circuli immobilis BE, qui eſt $BC = a$, radium circuli generatoris $BG = b$, arculum $Bb = Be = B\beta = ds$: erunt $eb = \frac{ds^2}{a}$, $e\beta = \frac{ds^2}{b}$ & coſinus anguli $\beta eb = h$; ſurrogatis ergo in lemm. 1. $\frac{ds^2}{b}$, $\frac{ds^2}{a}$ pro p & q, invenietur $b\beta = \frac{ds^2 \sqrt{(aa-2hab+bb)}}{ab}$, & æquatio $Ll.\,B\beta = BL.\,b\beta$ mutabitur in $ab.\,Ll = ds.\,BL$ in $\sqrt{(aa-2hab+bb)}$, hoc eſt $= BL.\,Lm\sqrt{(aa-2hab+bb)}$, ergo $ab\int Ll$ hoc eſt ab EL $= \sqrt{(aa-2hab+bb)}$ in $\int BL.\,Lm$ (id eſt per lemm. 2.) $= = AB.\,BP\sqrt{(aa-2hab+bb)} = b.\,2BP\sqrt{(aa-2hab+bb)}$ & dividendo per b, habetur a EL $= 2BP\sqrt{(aa-2hab+bb)}$. Quare EL : 2BP :: $\sqrt{(aa-2hab+bb)}$: a. Q. E. D.

Coroll. 1.

Ergo tota epicyclois eſt ad duplam diametrum AB circuli generatoris ut $\sqrt{(aa-2hab+bb)}$ ad a.

Coroll. 2.

Si $h = 1$ ſeu ſinui toti, quod contingit, cum ambo plana circuli generatoris & immobilis coincidunt, tunc erit Epicyclois ad duplum diametri generatoris, ut $a-b$ ad a, id eſt ut differentia radiorum circuli immobilis & generatoris, ad radium immobilis.

Problema.

Invenire in plano Sphæræ ichnographico quotcunque puncta ichnographica Epicloidis. Vid. Fig. 6.

Fig. 6. Sit ALB circulus generator ſeorſim deſcriptus, ad terminum A diametri AB erecta normaliter indefinita AQ, capiantur in eadem partes AO, AQ, quæ ſint ad dia-

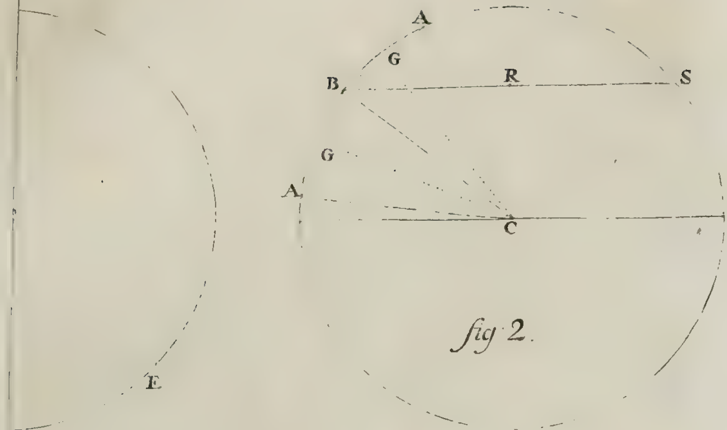


fig. 2.

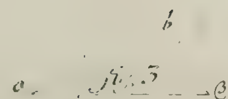


fig. 3

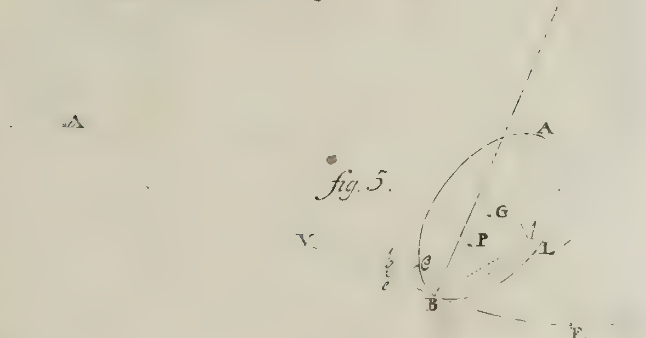


fig. 5.

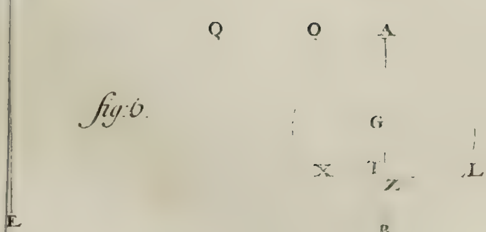


fig. 6.


fig 1
fig 2
fig 4
fig 5
fig 6

diametrum AB ut ſinus rectus & ſinus complementi ad radium, & ducantur OB, QB. Poſtea accepto quolibet arcu BL ductoque eius ſinu LZ protendatur hic ſinus usque ad occurſum X cum recta BQ. Quibus factis in plano ſphæræ ichnographico ad radium CE fiat angulus ECB qui ſit ad angulum BGL ut radius GB ad CE, capiatur in radio BC portio $Bt=XZ$, & perpendicularis $tu=LZ$ ad radium BC, dico punctum u, eſſe punctum optatum ichnographiæ epicycloidis: id eſt erecta in u ad planum CBE perpendicularis per punctum epicycloidis tranſibit; diſtantia vero huius puncti a puncto u, æquat ubique reſpectivam TZ. Hoc pacto tot puncta ichnographiæ Epicycloidis invenientur, quot quis voluerit: & *Offenburgi* problema in tota ſua latitudine ſolvitur, deſcribendo ſupra & infra circulum immobilem RS (fig. 2.) epicycloides, nam binæ oppoſitæ formabunt feneſtram ovalem; & conſtructio geometrica fiet, ſi in fig. 6. BG ad BC fuerit ut numerus ad numerum. Q. E. F.

PRINCIPIA DYNAMICA,

Autore *Chriſtiano Wolſio.*

NOn ignotum eſt, Illuſtrem *Leibnitium* menſuram virium demonſtraſſe per motum gravium aſcendentium: quam eius demonſtrationem una cum alia Cel. *Johannis Bernoulli* in Elementis Mechanicæ exhibui. Monuit quoque *Leibnitius* in Actis Eruditorum A. 1695. p. 154. *M. Dec.* 1726.

p. 154, ſe ad eandem virium æſtimationem ex ſimpliciſſima conſideratione ſpatii, temporis & actionis perveniſſe: id quod mihi anſam dedit iam A. 1710 menſuram virium ex motu æquabili eruendi. Repereram autem in motu æquabili vires æſtimari poſſe per impetus ad ſpatia applicatos, ſeu in hypotheſi mobilium æqualium per celeritates ad ſpatia applicatas. Hinc enim eandem, quam *Leibnitius* dedit, prodire virium menſuram evidens eſt. Omnis vero cardo rei in eo vertitur, ut oſtendatur, quod impetus ad ſpatia applicare liceat. Ut igitur id appareat, *Principia Dynamica*, quæ hactenus deſiderantur, ſumma, qua fieri poteſt, perſpicuitate demonſtrare conſtitui. Quoniam vero fœcunda virium definitio latet, unde earundem menſuram eruere licet, eius loco axiomata quædam ſumo: Et cum ex intentione *Leibnitii* in Dynamicis, ea, quæ vires & actiones corporum ſpectant, independenter a phænomenis, abſtrahendo quam maxime ab omni re ſenſibili, ex ſolis notionibus derivemus, ne cui in demonſtrationibus theorematum fundamentalium noſter arguendi modus videatur parum evidens, notandum eſt, nos data, per quæ quæſitum determinatur, ſumere tanquam unitatem, & quæſitum tanquam unitatem alteram, atque toties ponendo data, quoties ponitur quæſitum, rationem quæſitorum determinare per rationem datorum; cum ſic in caſu rationali ea prodeat relatio, quæ eſt numeri ad unitatem, in irrationali ea, quæ eſt rectæ ad rectam quandam datam. Sicuti enim data ſimul ſumta, per quæ determinatur quæſitum, arithmetice conſiderantur ut unitas; ita geometrice ut linea quædam data. Unitas cum ſit indiviſibilis, data omnia in replicatione ſimul ſumenda, prout ponuntur

tur in unitate : alias enim ex replicatione non enaſcetur homogeneum, quod numero reſpondet, & ad unitatem poſitam rationem habere poteſt. His notatis, & evidentes erunt noſtræ illationes, & abuſus evitabitur, in quem alias facilis eſt prolapſus.

Axioma 1.

1. *Si duo vel plura mobilia æqualia, eadem celeritate moveantur, vis eorundem eadem eſt.*

Scholion.

2. Vim corporis, quæ in motu locali ſeſe exerit, a maſſa & celeritate pendere, ita ut pro maſſa vel celeritate maiore maior ſit, nemo in dubium vocat. Quodſi ergo mobilia fuerint æqualia, hoc eſt, ſi eadem fuerit utriusque maſſa; virium quantitas a ſola celeritate pendet. Quamobrem, ſi eadem fuerit celeritas, eadem quoque eſſe debet virium quantitas, ſive vires ſint in ratione ſimplici, ſive in quacunque multiplicata vel ſubmultiplicata celeritatum.

Axioma 2.

3. *Eadem vi eodem tempore eadem abſolvitur actio.*

Scholion.

Eadem vi longiori tempore maiorem abſolvi actionem quam breviori, & contra eodem tempore vi maiore actionem maiorem abſolvi quam minori, nemo dubitat. Quantitas adeo actionis pendet a quantitate virium & temporis. Quamobrem, ſi vires fuerint æquales & tempus idem, actio quoque eadem eſſe debet.

Definitio 1.

4. *Vim vivam* cum *Leibnitio*, vel etiam ſimpliciter *vim* appello, quæ motui locali adhæret.

Definitio 2.

5 *Vim* vero *mortuam* cum eodem dico, quæ in ſolo conatu ad motum conſiſtit. Unde etiam *Conatum* appellare ſoleo.

Definitio 3.

6. *Vis pura* eſt, cui in agendo contraria nulla reſiſtit.

Corollarium.

7. Vis igitur pura toto actionis tempore invariata manet.

Scholion.

8. Iſtiusmodi vis in motu æquabili ſeſe exerit, ſi concipiatur fieri in medio non reſiſtente. Quantocunque enim intervallo mobile promoveatur, eadem tamen ſemper ſubſiſtit celeritas, conſequenter vis motrix eadem. Effectus adeo, quem producit, eam minime abſorbet. Secus ſeſe res habet in motu gravium, ubi vis in aſcenſum tota impenditur.

Definitio 4.

9. *Actio pura* dicitur, quæ exercetur vi motrice pura.

Scholion.

10. Talis eſt actio mobilis motu æquabili lati in medio non reſiſtente (§. 8)

Definitio 5.

11. *Actio uniformis* eſt, quæ duplo tempore dupla, triplo tripla & ita porro, ſeu in genere, quæ eſt ut tempus.

Scholion.

12. Iſtiusmodi actio in motu æquabili locum habet, ubi mobile continuo eadem celeritate moveri pergit, ſi nempe motus fieri concipitur in medio non reſiſtente.

Definitio 6.

13. *Effectus vis motricis extra conflictum* eſt translatio mobilis per ſpatium.

Scholion

Scholion 1.

14. *Papinus* negat dari aliquem effectum vis motricis, ubi nulla reſiſtentia ſuperanda, neque enim admittit eius effectum alium, niſi qui in ſuperanda reſiſtentia ſeſe exerit. Vid. Acta Eruditorum A. 1691. p. 7. Ex definitione effectus in genere, quæ metaphyſica eſt, erroris redarguitur. Ipſo etiam uſu loquendi refellitur. Quilibet fateri debet, idem fuiſſe effectum, ſive mobile vi impreſſa a termino A usque ad terminum B progrediatur, ſive ab homine ex loco A in locum B transferatur. Ecquis vero dixerit, hominem nihil egiſſe, dum corpus quoddam ex loco A in locum B transtulit. Enim vero non opus eſt, ut ea de re diſputemus. Utemur deſcriptione præſente tanquam nominali, quæ adeo arbitraria eſt. Si quis igitur translationem mobilis per ſpatium effectum vis motricis appellare renuit, is non invitis noſtris demonſtrationibus aliud quodcunque nomen voci huic ſubſtituat.

Scholion 2.

15. Si motus ſit in medio non reſiſtente, effectus purus eſt, qualem nos in ſequentibus conſtanter ſupponimus. Si vero in medio reſiſtente, idem mixtus eſt, cum pars virium continuo reſiſtentiæ medii impendatur, donec tandem vis omnis prorſus conſumatur.

Definitio 7.

16. *Effectus nocuus eſt*, qui vim motricem abſorbet: *innocuus*, qui eam intemeratam relinquit.

Scholion.

17. Effectus innocuus eſt in motu æquabili: nocuus in aſcenſu gravium, & in ſuperanda reſiſtentia.

Axioma 3.

28. *Si idem mobile per idem ſpatium transfertur, effectus idem eſt.*

Scholion.

19. Supponimus nempe motum fieri in medio non reſiſtente, aut ſaltem abſtrahimus ab actione, quæ impenditur in ſuperandam reſiſtentiam medii: id quod licet, quamdiu temporis nulla habetur ratio, quo effectus producitur.

Theorema 1.

20. *Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires ſunt ut maſſæ.*

Sit corporis m celeritate c moti vis v. Ergo corporis alterius æqualis m eadem celeritate c moti vis etiam v eſt (§. 1.) conſequenter corporis bis m celeritate c lati vis eſt bis v. Eodem modo patet, fore corporis ter m celeritate c moti vim ter v, & in genere corporis nm ($=M$) celeritate c moti nv ($=V$.) Eſt igitur $V : v = M : m$ hoc eſt, corporum inæqualium eadem celeritate motorum vires ſunt ut maſſæ. Q. E. D.

Theorema 2.

21. *Actiones uniformes eodem tempore abſolutæ ſunt inter ſe ut vires.*

Demonſtratio.

Abſolvatur vi v actio v tempore t. Ergo eadem vel æquali vi v eodem tempore t abſolvetur alia actio a priori æqualis (§. 3.) conſequenter vi bis v abſolvetur eodem tempore t actio bis a. Similiter patet, vi ter v eodem tempore t abſolvi debere actionem ter a &c. Immo in genere, vi ut nv ($=V$) abſolvi debere actionem

ut

ut *na* (=A) eodem tempore *t*. Eſt igitur A : *a*=V : *v*, hoc eſt, actiones eodem tempore abſolutæ ſunt ut vires. Q. E. D.

Corollarium 1.

22. Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires ſunt ut maſſæ (§. 20.) Actiones igitur corporum, quæ eadem celeritate moventur, eodem tempore abſolutæ ſunt in ratione maſſarum (§. 21.)

Corollarium 2.

23. Si A=*a*, erit V=*v*, hoc eſt, ſi actiones eodem tempore abſolutæ fuerint æquales, vires æquales ſunt.

Theorema 3.

24. *Actiones uniformes viribus æqualibus abſolutæ ſunt inter ſe ut tempora, quibus abſolvuntur.*

Demonſtratio.

Abſolvatur vi *v* tempore *t* actio *a*. Ergo eadem vi *v* eodem vel æquali tempore *t* abſolvetur actio alia *a* eidem æqualis (§. 3.) conſequenter vi eadem *v* tempore bis *t* actio bis *a*. Eodem modo patet, vi eadem vel æquali *v* tempore ter *t* abſolvi debere actionem ter *a* & quadruplo tempore *t* actionem quadruplam *a*, immo in genere tempore quocunque *nt* (=T) actionem *na* (=A). Eſt igitur A : *a*=T : *t*, hoc eſt, actiones viribus æqualibus abſolutæ ſunt ut tempora, quibus abſolvuntur. Q. E. D.

Theorema 4.

25. *Actiones uniformes ſunt in ratione compoſita temporum & virium.*

Demonſtratio.

Actiones uniformes A & *a* eadem vi V productæ

ſunt

ſunt inter ſe ut tempora T & *t*, quibus producuntur (§. 24.) Producatur iam actio alia *a* eodem tempore *t*, quo *α* producitur, vi quacunque V. Erit *α* : *a* = V : *v* (§. 21.) Ergo A : *a* = TV : *tv*, hoc eſt, actiones uniformes ſunt in ratione compoſita temporum & virium Q. E. D.

Corollarium.

26. Si corpora inæqualia eadem celeritate ferantur, vires ſunt ut maſſæ (§. 20.) Actiones igitur uniformes in hypotheſi mobilium inæqualium eadem celeritate latorum ſunt in ratione compoſita maſſarum atque temporum.

Theorema 5.

27. *Vires inæquales eandem actionem abſolvunt temporibus ſibi reciproce proportionalibus.*

Demonſtratio.

Actiones uniformes A & *a* ſunt in ratione compoſita temporum T & *t* atque virium V & *v* (§. 25.) quare cum ſit A = *a per hypotheſin*; erit TV = *tv* conſequenter V : *v* = T : *t*, hoc eſt, vires ſunt ut tempora reciproce. Q. E. D.

Corollarium.

28. Quodſi mobilia eadem celeritate moventur, vires ſunt ut maſſæ (§. 20.) adeoque actionem eandem abſolvunt temporibus eorum maſſis reciproce proportionalibus (§. 27.)

Theorema 6.

29. *Si duo mobilia æqualia per ſpatia inæqualia transferuntur, effectus ſunt ut ſpatia.*

Demonſtratio.

Transferatur mobile *m* per ſpatium *ſ* & denotet *e* effectum. Ergo ſi idem vel æquale mobile *m* per idem vel

vel æquale ſpatium S transfertur, erit effectus etiam ut *e* (§. 18.), conſequenter ſi mobile *m* transfertur per ſpatium bis *ſ*, erit effectus bis *e*. Et eodem modo patet in genere, ſi mobile *m* transfertur per ſpatium quodcunque *nſ* (=S), fore quoque effectum ut *ne* (=E). Quare, ſi mobilia fuerint æqualia, erit E:*e*=S:*ſ*, hoc eſt, effectus ſunt ut ſpatia. Q. E. D.

Theorema 7.

30. *Si duo quæcunque mobilia per idem ſpatium transferuntur, effectus ſunt inter ſe ut maſſæ eorundem.*

Demonſtratio.

Transferatur mobile *m* per ſpatium *ſ* & denotet *e* effectum. Ergo, ſi idem vel æquale mobile *m* per idem vel æquale ſpatium *ſ* transfertur, erit denuo effectus *e* (§. 18). Si igitur mobile fuerit ut bis *m*, quod cum ſimplici *m* per idem ſpatium *ſ* transfertur, effectus erit ut bis *e*. Quare cum eodem modo pateat, eſſe in genere effectum ut *ne*(=E), ſi mobile, cum alio *m* per idem ſpatium *ſ* translatum, fuerit ut *nm*(=M); evidens eſt, quod ſit in hac hypotheſi E:*e*=M:*m*, hoc eſt, effectus ſint ut maſſæ mobilium per idem ſpatium translatorum. Q. E. D.

Corollarium.

31. Quando corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires ſunt ut maſſæ (§. 20). Quodſi ergo per eadem ſpatia transferuntur, effectus ſunt ut vires (§. 30.)

Theorema 8.

32. *Si duo quæcunque mobilia per ſpatia quæcunque transferuntur, effectus ſunt in ratione compoſita maſſarum atque ſpatiorum.*

Demonſtratio.

Si duo mobilia æqualia, quorum maſſæ ſunt ut M, transferuntur per ſpatia quæcunque S & ſ, erunt effectus E & ε uti ſpatia S & ſ (§. 29.) Transferatur iam mobile, cuius maſſa ut *m*, per idem ſpatium ſ cum altero M; erunt effectus ε & *e* ut maſſæ M & *m* (§. 30.) Quare E : *e*=MS : *m*ſ, hoc eſt, effectus quicunque ſunt in ratione compoſita maſſarum & ſpatiorum, per quæ mobilia transferuntur. Q. E. D.

Corollarium.

33. Si E=*e* erit MS=*m*ſ, adeoque M:*m*=ſ:S, hoc eſt, ſi effectus fuerit idem, ſpatia ſunt maſſis reciproce proportionales

Theorema 9.

34. *In motu æquabili effectus ſunt in ratione compoſita maſſarum, celeritatum atque temporum.*

Demonſtratio.

In omni motu, adeoque & in æquabili, effectus E & *e* ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m* atque ſpatiorum S & ſ (§. 32) Sunt vero ſpatia S & ſ in motu æquabili in ratione compoſita celeritatum C & *c* atque temporum T & *t*. Quare effectus E & *e* ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m*, celeritatum C & *c* atque temporum T & *t*. Q. E. D.

Corollarium 1.

35. Quodſi fuerit T=*t*, erit E:*e*=MC:*mc*, hoc eſt effectus innocui eodem tempore producti ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m* atque celeritatum C & *c*.

Corollarium 2.

36. Cum impetus I & *i* ſint in ratione compoſita

mas-

maſſarum M & *m* atque celeritatum C & *c*: effectus innocui E & *e* ſunt in ratione compoſita impetuum I & *i* atque temporum T & *t* (§. 34.)

Corollarium 3.

37. Effectus adeo innocui eodem tempore producti ſunt ut impetus.

Corollarium 4.

38. Si C$=$*c*, erit E:*e*$=$MT : *mt*, hoc eſt, ſi duo mobilia eadem celeritate moventur, effectus innocui ſunt in ratione compoſita maſſarum atque temporum.

Corollarium 5.

39. Quodſi ergo mobilia M & *m* fuerint æqualia & celeritate eadem moveantur, erunt effectus innocui ut tempora T & *t*, quibus producuntur.

Corollarium 6.

40. Si mobilia æqualia eadem celeritate moventur, vis eorundem eadem eſt (§. 1). Effectus adeo innocui viribus æqualibus producti ſunt ut tempora, quibus producuntur (§. 39.)

Corollarium 7.

41. Actiones uniformes viribus æqualibus abſolutæ ſunt etiam in ratione temporum, quibus abſolvuntur (§. 24). Actiones adeo uniformes viribus æqualibus abſolutæ ſunt ut effectus, qui per eas producuntur (§. 40).

Corollarium 8.

42. Si M$=$*m*, erit E:*e*$=$CT:*ct*, hoc eſt, ſi duo mobilia fuerint æqualia, effectus ſunt in ratione compoſita celeritatum C & *c* atque temporum T & *t*.

Corollarium 9.

43. Si E$=$*e*, erit MCT$=$*mct*, conſequenter

MC : *mc*=*t* : T , hoc eſt effectu exiſtente eodem , impetus MC & *mc* ſunt ut tempora T & *t* reciproce.

Corollarium 10.

44. Eodem modo patet , eſſe C : *c*=*mt*: MT, hoc eſt, effectu exiſtente eodem, celeritates C & *c* eſſe in ratione compoſita reciproca maſſarum *m* & M atque temporum *t* & T.

Corollarium 11.

45. Quodſi igitur ulterius *m*=M , erit C: *c*=*t*: T, hoc eſt, ſi duo mobilia fuerint æqualia , effectus idem producitur temporibus , quæ celeritatibus reciproce proportionales ſunt.

Corollarium 12.

46. Si vero fuerit T=*t* , erit C: *c*=*m*: M, hoc eſt, ſi idem effectus innocuus eodem tempore producitur, celeritates C & *c* ſunt reciproce ut maſſæ *m* & M.

Theorema 10.

47. *Actiones, quibus idem effectus producitur , ſunt ut celeritates.*

Demonſtratio.

Si duobus mobilibus M & *m* diverſa celeritate C & *c* latis idem producitur effectus , tum is aut eodem tempore producitur, aut tempore diverſo.

I. Quod ſi mobilia fuerint æqualia & effectus idem diverſo tempore producatur , celeritates erunt ut tempora reciproce, quibus is producitur (§. 45), hoc eſt, corpus , quod tempore $\frac{1}{2}$T effectum producit, movetur celeritate 2C, cum alterum , quod effectum tempore T producit, moveatur ſimplici celeritate C, & ita porro. Iam evidens eſt, actionem uniformem eſſe duplam, quæ di-

dimidio tempore effectum producit; triplam, quæ ſubtriplo, & ita porro; hoc eſt, actiones in eadem ratione creſcere, in qua decreſcit tempus, quod effectui ab eodem mobili impenditur conſequenter $A:a=t:T$. Quare cum ſit $C:c=t:T$ per *demonſtrata*; ſi ab eodem mobili exiſtente idem effectus producitur diverſo tempore, actiones ſunt ut celeritates. *Quod erat unum.*

II. Si idem effectus producitur eodem tempore, mobili exiſtente diverſo; celeritates C & c ſunt reciproce ut maſſæ M & m (§. 46.) ſcilicet ſi $m=\frac{1}{2}M$, erit $c=2C$, ſeu corpus dimidium movetur celeritate dupla. Quoniam hic eadem ratio maſſarum, quæ in caſu priori erat temporum, ratio vero celeritatum eodem modo ſeſe habet; perinde eſt, ſive maſſæ ſint eædem & tempus diverſum, ſive maſſæ diverſæ & tempus idem. Sed in caſu priori actiones A & a ſunt reciproce ut tempora, directe ut celeritates, *per modo demonſtrata*. Ergo & in hoc poſteriori eædem actiones A & a erunt reciproce ut maſſæ, vel directe ut celeritates. *Quod erat ſecundum.*

III. Denique ſi idem effectus diverſo tempore producatur, mobilibus M & m exiſtentibus diverſis; ponamus effectum eundem e eodem tempore T produci actionibus A & α: erit $A:\alpha=m:M$ *per caſ.* 2. Producatur idem effectus e tempore t actione a, mobili exiſtente m, qui tempore T actione α producebatur: erit $\alpha:a=t:T$, *per caſ.* 1. Eſt igitur $A:a=tm:TM$. Sed effectu exiſtente eodem, $C:c=tm:TM$ (§. 44). Ergo $A:a=C:c$, hoc eſt, actiones, quibus idem effectus producitur, ſunt ut celeritates. *Quod erat tertium.*

Corollarium.

48. Actiones eodem tempore ſunt ut vires (§. 21.) Ergo, ſi idem effectus innocuus eodem tempore producitur, vires ſunt ut celeritates (§. 47.)

Theorema 11.

49. *Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, actiones ſunt ut effectus innocui.*

Demonſtratio.

Producatur actione *a* effectus *e* celeritate *c*. Ergo eadem celeritate actione bis *a* producetur effectus bis *e*; actione ter *a* effectus ter *e* & ita porro, conſequenter actione *na* (=A) effectus *ne* (=Z.) Sunt igitur actiones A & *a* ut effectus innocui E & *e*. Q. E. D.

Theorema 12.

50. *Actiones uniformes ſunt in ratione compoſita effectuum & celeritatum.*

Demonſtratio.

Effectus E & *e* eadem celeritate C producti ſunt ut actiones A & α, quibus producuntur (§. 49.) Producatur iam actione *a* idem effectus E celeritate *c*, qui actione α celeritate C producitur: erunt actiones α & *a* ut celeritates C & *c* (§. 47.) Ergo actiones uniformes A & *a* ſunt in ratione compoſita effectuum innocuorum E & *e* atque celeritatem C & *c*. Q. E. D.

Corollarium.

51. Quoniam $EaC = eAc$ (§. 50.) erit $E : e = Ac : aC$; hoc eſt, effectus innocui ſunt in ratione compoſita ex directa actionum & reciproca celeritatum.

Theo-

Theorema 13.

52. *Actiones uniformes ſunt ut impetus ad ſpatia applicati, quæ motu æquabili deſcribuntur.*

Demonſtratio.

Actiones A & *a* ſunt in ratione compoſita effectuum E & *e* atque celeritatum C & *c* (§. 50.) Sed effectus E & *e* ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m* atque ſpatiorum S & *ſ* (§. 32) Ergo actiones ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m*, celeritatum C & *c* atque ſpatiorum S & *ſ*. Quamobrem, cum in motu æquabili impetus I & *i* ſint in ratione compoſita maſſarum M & *m* atque celeritatum C & *c*; erunt actiones A & *a* in ratione compoſita impetuum I & *i* atque ſpatiorum S & *ſ*, ſeu ut impetus ad ſpatia applicati. Q. E. D.

Corollarium.

53. In motu æquabili ſpatia S & *ſ* eodem tempore abſoluta ſunt ut celeritates C & *c*, & impetus in ratione compoſita maſſarum & celeritatum ſeu ut MC & *mc*. Actiones igitur eodem tempore abſolutæ ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum M & *m* atque celeritatum duplicata C^2 & c^2, hoc eſt, $A : a = MC^2 : mc^2$.

Theorema 14.

54. *In motu æquabili vires ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum.*

Demonſtratio.

Actiones uniformes eodem tempore abſolutæ A & *a* ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum M & *m* atque duplicata celeritatum C^2 & c^2 (§. 55) Sed eædem ſunt ut vires V & *v* (§. 21). Ergo etiam vires V & *v* ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum M & *m* atque

m atque duplicata celeritatum C^2 & c^2. Q. E. D.

Corollarium I.

55. Mobili igitur exiſtente eodem, vires ſunt in ratione duplicata celeritatum.

Corollarium 2.

56. In motu quomodocunque accelerato in fine cuiuscunque temporis vires ſunt in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum & duplicata celeritatum in fine iſtius temporis acquiſitarum.

Corollarium 3.

57. Quoniam gravia per altitudinem quamcunque cadendo eam celeritatem acquirunt, qua ad eandem aſcendere poſſunt; igitur vires proiectorum, quibus aſcenſus inchoatur, ſunt in ratione compoſita ex ſimplici masſarum & duplicata celeritatum, quas per altitudines, ad quas aſcendunt, cadendo acquirere valent.

Scholion.

58. Atque hæc eſt illa demonſtratio, quam in hypotheſi mobilium æqualium & rationis duplæ celeritatum A. 1710. cum Illuſtriſſimo Comite ab *Herberſtein*, illuſtri *Leibnitio*, atque aliis communicavi, æſtimans actionem motricem per impetus ad ſpatia applicatos, quamque *Leibnitius* in ſuam cum viris celeberrimis *Iohanne Bernoulli* atque *Iacobo Hermanno* aliisque communicatam, recidere ſcripſit d. 12. Ian. A. 1711. datis litteris dicto fidem his verbis faciens: " Calculum virium purarum " ſeu actionum talem inſtituo. *S*it ſpatium *ſ*, tempus *t*, " velocitas *v*, corpus *c*, effectus *e*, potentia *p*, actio *a*, " In motu æquabili erit *tv* ut *ſ*, *e* ut *cſ*, *tp* ut *a*. Atque " hæc quidem ſine demonſtratione aſſumi poſſunt. Accedit,

cedit, quod demonſtrandum, *ev* ut *a*. Hinc porro plu- „
rima theoremata demonſtrari poſſunt, e. gr. *p* ut cv^2. „
Nam *tp* ut *ev*: ſed *e* ut *cs*, & *ſ* ut *tv*. Ergo fit *tp* ut ctv^2, „
ſeu *p* ut cv^2. In motu inæquabili res etiam procedit; „
ſed ordinatim invicem ducenda ſunt, quorum rationes „
componuntur, & in elementaribus, unde deinde ſumma „
dat æſtimationem totalem. Atque in his continetur „
pars meorum dynamicorum, abſtracta maxime a re- „
bus ſenſibilibus, etſi deinde per experimenta verifice- „
tur. „ Nullus itaque dubito, me hic principia *Dynamicæ* menti *Leibnitii* conformia propoſuiſſe, quibus via ad ulteriora ſternitur.

Theorema 15.

59. *In motu gravium ſeu æquabiliter accelerato vires ſunt in ratione compoſita ſpatiorum, per quæ gravia deſcendunt, atque maſſarum.*

Demonſtratio.

In tempuſculo infinite parvo, quo grave per ſpatiolum infinite parvum deſcendit, motus ſupponitur æquabilis, adeoque duorum mobilium M & *m*, quæ per inæquales altitudines deſcenderunt, actiones motrices A & *a* ſunt in ratione compoſita tempuſculorum *d*T & *dt* atque virium V & *v* integro deſcenſu acquiſitarum (§. 25). Eædem vero etiam ſunt ut impetus MC & *mc* ad ſpatiola *d*S & *dſ* applicati, quæ ulterius deſcendendo tempuſculis *d*T & *dt* celeritatibus temporibus T & *t* per ſpatia S & *ſ* acquiſitis C & *c* deſcriberent (§. 52.) Habemus itaque $VdT : vdt = MCds : mcdſ$, conſequenter $VCdT$:

$vcdt = MC^2dS : mc^2dſ$. Eſt vero in motu gravium ex hypotheſi *Galilæana*, ſeu æquabiliter accelerato, $C^2 : c^2 = dS : dſ$ & $C : c = dT : dt$. Ergo $VdT^2 : vdt^2 = MdS^2 : mdſ^2$, conſequenter $dT\sqrt{V} : dt\sqrt{v} = dS\sqrt{M} : dſ\sqrt{m}$. Quoniam itaque in tempuſculo infinite parvo vires V & v perinde ac maſſæ M & m conſtantes ſunt; erit $T\sqrt{V} : t\sqrt{v} = S\sqrt{M} : ſ\sqrt{m}$, conſequenter $T^2V : t^2v = S^2M : ſ^2m$: &, ob $T^2 : t^2 = S : ſ = C^2 : c^2$ ex natura motus æquabiliter accelerati, $VC^2 : vc^2 = MSC^2 : mſc^2$. Eſt igitur $V : v = MS : mſ$, hoc eſt, vires ſunt in ratione compoſita ſpatiorum, per quæ gravia deſcendunt, atque maſſarum. Q. E. D.

Corollarium 1.

60. Quoniam grave vi cadendo acquiſita ad eam altitudinem adſcendit, unde decidit: Vires gravium aſcendentium ſunt in ratione compoſita maſſarum & altitudinum, ad quas aſcendunt.

Scholion 1.

61. Atque hoc eſt illud principium, quod in virium æſtimatione a *Leibnitio* ſuppoſitum conſtanter negarunt *Papinus*, aliique antagoniſtæ.

Corollarium 2.

62. Quoniam aſcenſus gravis aſcendentis eſt effectus nocuus (§. 16), eſt autem ut maſſa ducta in altitudinem, per quam aſcenditur (§. 32); vires ſunt ut effectus nocui in aſcenſu gravium ex hypotheſi *Galilæana*. (§. 60.)

Scho-

Scholion 2

63. Perperam igitur omnis effectus ſtatuitur cauſæ proportionalis.

Theorema 16.

64. *Effectus innocui ſunt in ratione compoſita, ex ſimplici temporum & ſubduplicatis virium atque maſſarum.*

Demonſtratio.

Effectus innocui E & *e* ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m*, celeritatum C & *c* atque temporum T & *t* (§. 34). Sed vires V & *v* ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m* ſimplici atque celeritatum duplicata C^2 & c^2 (§. 54), adeoque celeritates C & *c* in ratione compoſita ex ſubduplicata maſſarum reciproca & ſubduplicata virium directa, nempe ut $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{M}}$ ad $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{m}}$. Quamobrem effectus E & *e* ſunt in ratione compoſita temporum T & *t* directa, atque virium & maſſarum ſubduplicatis $\sqrt{VM}$ & $\sqrt{vm}$. Q. E. D.

Corollarium 1.

65. Si $T = t$, erit $E : e = \sqrt{VM} : \sqrt{vm}$, hoc eſt, effectus innocui eodem tempore producti ſunt in ratione compoſita ex ſubduplicatis virium atque maſſarum.

Corollarium 2.

66. Si præter $T = t$ etiam $M = m$, erit $E : e = \sqrt{V} : \sqrt{v}$, hoc eſt, effectus eodem tempore, mobilibus exiſtentibus æqualibus, producti ſunt in ratione ſubduplicata virium.

Theorema 17.

67. *Vires ſunt in ratione compoſita effectuum eodem tempore productorum & celeritatum.*

Demonſtratio.

Sunt enim ut actiones eodem tempore abſolutæ (§. 21). Sed eædem actiones ſunt in ratione compoſita effectuum eodem tempore productorum atque celeritatum (§. 50). Ergo vires ſunt in ratione compoſita effectuum eodem tempore productorum atque celeritatum Q. E. D.

Corollarium.

68. Effectus E & *e* ſunt in ratione compoſita maſſarum M & *m* atque ſpatiorum S & *ſ* (§. 32). Ergo vires V & *v* ſunt ut MSC ad *mſc*, hoc eſt, ut impetus MC & *mc* ad ſpatia S & *ſ* applicati.

Theorema 18.

69. *Conatus ſeu vires mortuæ ſunt in ratione compoſita maſſarum & celeritatum.*

Demonſtratio.

Per legem continuitatis *Leibnitianam* conatus conſiderari poteſt inſtar vis vivæ moventis corpus per ſpatiolum infinite parvum, hoc eſt, revera nullum. Quare, cum conatui ſic conſiderato applicari poſſit theorema de viribus vivis puris attenta differentia, quæ inter caſum hunc ultimum & ceteros intercedit, vires puræ autem ſint ut MSC ad *mſc* (§. 57), evaneſcentibus ſpatiis S & *ſ*, in præſenti caſu revera nullis, erunt conatus ut MC ad *mc*. Q. E. D.

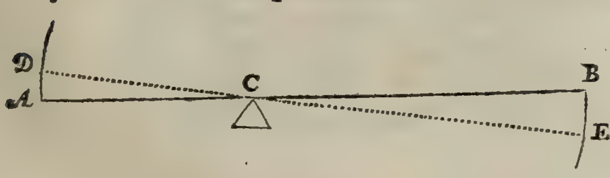
Scho-

Scholion. 1.

70. Obtinet hoc in vecte ceteriſque potentiis mechanicis. *Leibnitius* in Actis Erudit. l. c. p. 150. paulo aliter rationem reddit, cur conatus ſint celeritatibus proportionales: putat enim, in ipſo initio motus deſcenſus ſeu ipſas quantitates ſpatiorum deſcenſu percurſorum, nempe adhuc infinite parvas ſeu elementares, eſſe conatibus deſcendendi proportionales. Enimvero quoniam noſtra principia cum ſuis concordare agnovit (§. 58), imo agnoſcere debuit, cum nullum dederimus theoma, quod non cum menſura virium Leibnitiana conſentiat, nondum videtur illo tempore Dynamica ex primis ſuis principiis conſtituiſſe. Sane nec vires vivæ in omni hypotheſi gravium ſunt ſpatiis proportionales: neque enim ſolum ex demonſtratione ſuperiori (§. 59) patet, id tantum convenire hypotheſi Galilæanæ; verum, ſi demonſtrationem generaliter concipias, patebit ulterius, fore vires in ratione compoſita ex ſimplici maſſarum, duplicata ſpatiorum directa, & duplicata temporum reciproca. Quoniam igitur in hypotheſi Galilæana ſpatia ſunt in ratione temporum duplicata; ſingulari hic ratione contingit, ut vires ſpatiis proportionales evadant.

Corollarium 1.

71. Si vectis ponderibus in A & B onuſtus moveatur circa centrum motus C, translatio



ponderum per ſpatia AD & BE fit eodem tempore. Sunt adeo effectus E & *e*, ſeu M × AD & *m* × EB, hoc

 eſt,

eſt, M×AC & m×CB ut impetus MC & mc (§. 37), conſequenter M×AC ad m×CB, ut conatus deſcendendi (§. 69).

Corollarium 2.

72. Quodſi ergo conatus deſcendendi fuerint æquales, erit M×AC=m×CB, conſequenter M: m=CB : AC.

Scholion. 2.

73. En igitur demonſtrationem theorematis mechanici & fundamentalis ex principiis Dynamicis deductam. Mittimus alia, quæ inde derivari poterunt. Neque enim in præſenti nobis propoſitum fuit, quam principia Dynamicæ conſtituere.



CLASSIS
SECUNDA,

continens

PHYSICA.

NOVA

PLANTARVM GENERA,

Auctore

I. C. Buxbaum.

I.

Chamædaphne.

FRequens eſt Ingriæ & Careliæ uliginoſis & terra turfacea ſcatentibus ericetis frutex, Botanicis hucusque minus notus, qui merito novum conſtituit genus, cuius notæ ſunt: Flores monopetali, campaniformes globoſi, fructus in quinque loculamenta diviſi, ſeminibus fœti exiguis ſubrotundis. Adde modum naſcendi, qui Polygonato vulgari reſpondet. Deſcriptio ſit ſequens: Radix lignoſa, tortuoſa, repens, ramoſa, quæ hinc inde fibras in faſciculos congeſtas dimittit, novos quoque iuxta ſtipitem emittit ſtolones. Caudex digiti fere craſſitie, ſpadiceus, dodrantali ſpatio

terram ſuperans, in duos vel tres maiores, hique rurſus in minores brachiantur ramos arcuatos & verſus terram inclinatos. Folia ex ſummis egrediuntur ramis, alternatim poſita, oblonga, ex rotundo paulum acuminata, rigida, granulis albidis adſperſa, quaſi puſtulata, ſuperiore parte obſcure, inferiore vero dilutius viridia, glabra, hyemisque patientia, petiolis brevibus adhærentia & erecta. Inferiora ſunt maiora, eque horum alis gemmæ novorum ſurculorum prodeunt quatuor vel quinque, ſuperiora vero ſucceſſive, quo altius adſcendas, minora & magis rotunda, tandemque Serpilli foliorum æmula evadunt. Ex ſingulis horum alis ſinguli enaſcuntur flores, brevi petiolo reflexo inſidentes, penduli, nivei, quinque laciniis acutis conniventibus diſſecti, calyce quinquifido, brevi, fuſco, & ab alio bifido ſuſtentato cincti, decem ſtaminibus, piſtillum breve quinquetrum ambientibus præditi. Sequuntur capſulæ quinquangulares, quinqueloculares, & quinque valvis ab apice dehiſcentes, perianthio inſtar ſtellæ expanſo inſidentes. Mirum in hac planta eſt, quod folia, quæ tota retinet hyeme, media demum æſtate abiiciat. Floribus enim ultimis Maii & primis Iunii diebus emarcidis, iam novi ex alis foliorum inferiorum rami frugiferi ſurgunt ſurculi, qui maius incrementum ſumentes Iulio producunt folia & florum gemmas, prioris interim anni foliis delapſis, ramulisque nudis cum ſolo relictis fructu. Gemmæ vero novi ſurculi eo perveniunt, ut, ſi calycem, quo obvolvuntur, immaturum aperias, ſtamina florum futuri anni clare ſe conſpicienda exhibeant. Videtur autem tota planta tempeſtate accedente frigida, Auguſto nempe & Septembri,

exa-

exareſcere. Vere tamen ſequenti, ſi aliquot ſaltem dies ſol læte fulſerit, folia ante nigra viridem acquirunt colorem, & planta floribus onuſta elegantiſſimis non ſine ſtupore conſpicitur. Ramulus, qui ante annum floruerat, eſt aridus, foliis orbus, capſularum ſeminalium ſaltem veſtigia brevi etiam interitura oſtendens, terræque proximus, licet ante annum in ſummitate fruticis locatus. Quamvis enim ſingulis annis hic frutex procreſcat, nunquam tamen evadit altior, ſed caudex ſemper verſus terram inclinatur & novas agit radices. Ob foliorum aliquam cum Lauro ſimilitudinem nomen hactenus vacuum, olim tamen variis tributum plantis, revocamus & Chamædaphnen nominamus. Vid. Fig. I.

II.
Potamopitys.

Planta hæc paluſtris facie externa convenit cum I. Bauhini Equiſeti facie Polygono fœmina, ſeu Limnopevce Cordi, ob florem & fructum vero longe diverſa, uti patebit ex deſcriptione ſequenti: Radix fibroſa. Caulis palmaris fere, interdum ramoſus, (qualem noſtra figura exhibet) rectus, rotundus, concavus, ex multis articulis pyxidatis conflatus. Ex his ipſis articulis egrediuntur folia radiatim poſita, ſex, ſeptem vel octo, quæ radici proxima & inferiora, ſunt anguſta, mollia atque virentia, Gallii foliorum æmula; ſuperiora vero multo latiora, quatuor, tria vel interdum duo ſaltim coniuncta. Ex foliorum alis exeunt flores parvi, albicantes, ex petalis quatuor, anguſtis & acutis, cruciatim poſitis, conſtantes, ſeſſiles, calyce pariter quatrifido ſuſtentati, in floris

medio piſtillum rotundum, quatuor ſtaminibus cinctum. Fructus ſequitur rotundus, quadricapſularis, ſeminibus gracilibus lunatis fœtus. Character itaque huius plantæ eſt: Folia ſtellata, flores tetrapetali & fructus in quatuor loculamenta diviſi. Pertinet iuxta Raium ad Herbas flore tetrapetalo anomalas. Occurrit in paluſtribus Thraciæ, non longe a Boſphoro prope pagum Boiucteri, floret Maio. Fig. II.

III.
Ceratocarpus.

Huius notæ ſunt: Folia graminea. Flores apetali, calyce deſtituti, embryoni inſidentes. Fructus triangulares depreſſi, capſulæ Burſæ paſtoris fere ſimiles, bicornes & bivalves, ſemine fœti unico, ſingularis figuræ, longum enim eſt, gracile & teres, cuius extremitates inſtar arcus inflexæ & ſibi invicem adductæ intermedia coniunguntur membrana. Deſcriptio vero eſt ſequens: Radix parva, fibroſa, ut mihi videtur, annua, ex qua cauliculus unicus, lignoſus & anguloſus, ab exortu ſtatim ramoſus. Folia anguſta, graminea, unum vel duo, ſingulo ramo nec non ſingulæ capſulæ aut flori ex caule emergenti ſingulum appoſita, rigida, in medio carinata. Ex alis foliorum aut ramulorum naſcuntur floſculi ſtaminei, exigui, lutei, nullo obvoluti calyce, ſed fructum ſtipantes tenerum, qui deinde abit in capſulam bicornem ſupra deſcriptam. Creſcit in locis ſqualidis, ſalſis & arenoſis, circa mare Caſpium, in regione Tageſtan, nec non circa Aſtrakan. Auctumno caulis a radice a ventis divellitur & vagatur per campos, more Eryngii aut Echinophoræ. Ob duos capſulæ aculeos ſeu cor-

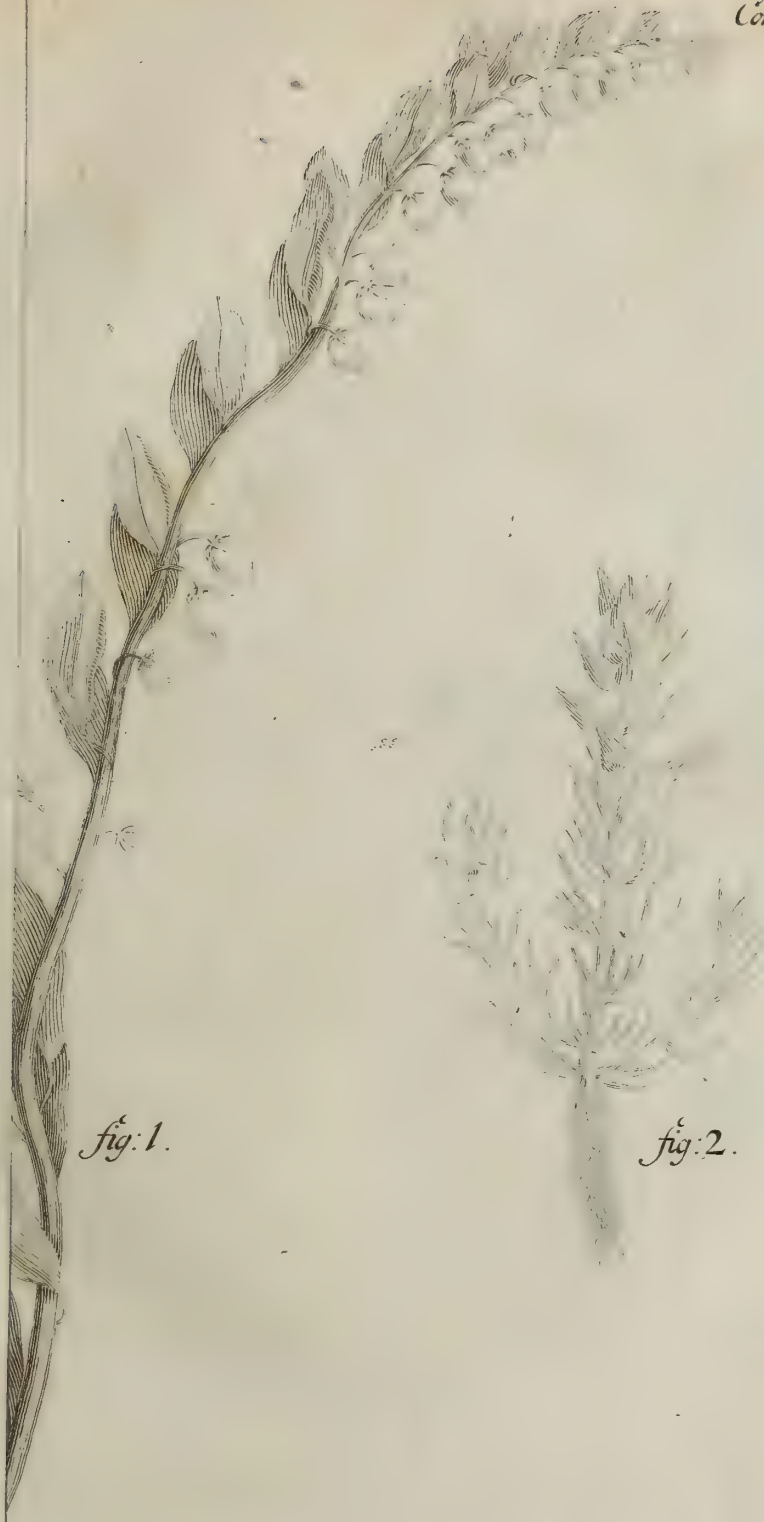


fig: 1.

fig: 2.



fig. 1 *fig. 2.*

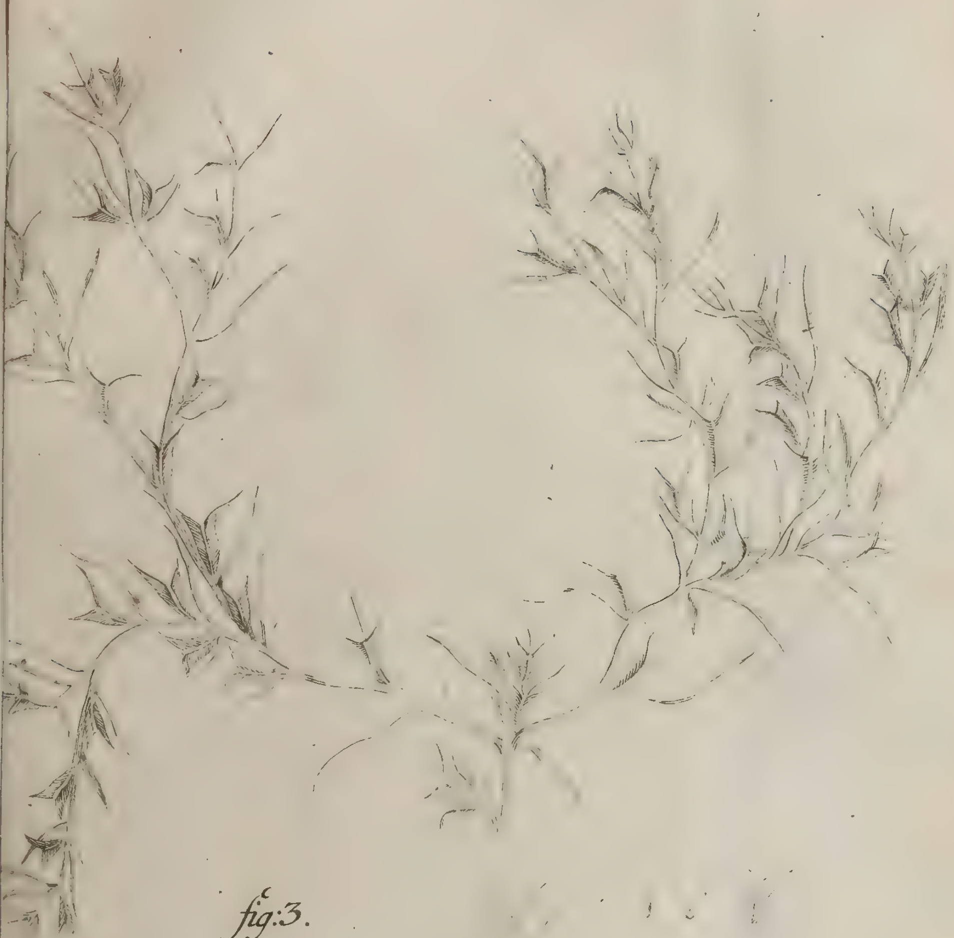


fig: 3.

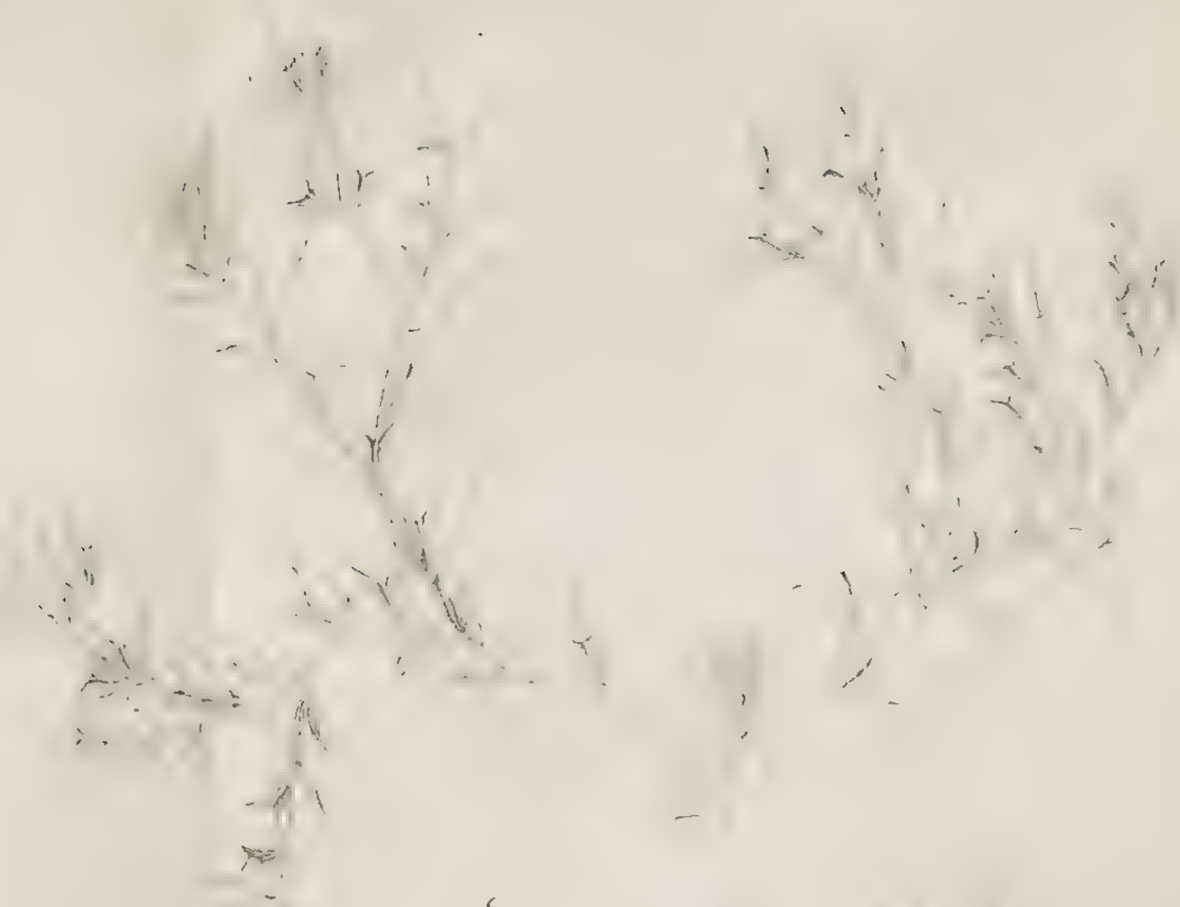


fig:3.

cornua ſic appellare placuit. Deſcribitur a Tourneforto in Corollario novum genus, Ceratoides, a fructu cornuto. Diu hæſi dubius, anne Ceratocarpus noſter ſit eius Ceratoides folio Pſyllii. Sed fructum dicit bicapſularem a flore remotum. Suſpectus tamen mihi eſt, quod nullam Ceratoidis dederit figuram. Forſitan vidit plantam immaturo adhuc fructu & deceptus eſt. Fig. III.

DE
DIRECTIONE CORPORVM GRAVIVM
IN VORTICE SPHAERICO,
ET
FIGVRA NVCLEI,
Diſſertatio Experimentalis,
Auct.
G. B. Bülffingero.

Occaſio et Deſtinatio Experimenti.

I.

SVnt anni complures; ex quo occaſione *M. Nov.*
epiſtolæ a *Iac. Bernoullio* ad *I. Chr.* 1725.
Sturmium ſcriptæ, & in Actis Erud.
Lipſ. 1686. M. Febr. p. 92. ſeqq.
exhibitæ, viſum mihi eſt, recte illos
ſubducere rationes ſuas, qui *ex motu vorticis*, qualem

Carteſius ſtatuit, *Sphærici*, circa ſphæræ axem gyrante, concludant, *gravia* illius ope potius *ad axem*, quam ad centrum telluris tendere debere. Poſito enim, uti Carteſius voluit, ætherem aëremque conſtare corpuſculis ad concipiendum motum vehementiorem aptioribus, quam ſunt terreſtria, additoque, quod vulgaribus conſtat experimentis, corpora vehementiori motui apta fortius niti ad peripheriam, ſi in circulo illa moveri contingat, adeoque cætera ab illis propelli ad centrum motus illius circularis: certum erat, terreſtria per impulſum illum colligi a peripheria *ad centrum*. Sed quale centrum? centrum ipſius *ſphæræ*, & vorticis totius? *an* centrum *circuli* cum æquatore vorticis *paralleli*?

II. *Carteſiani*, ut explicatio propius accederet ad Phænomenon gravitatis, cui ſcil. explicando hæ vorticum hypotheſes a Carteſio deſtinabantur, ex illa vorticis actione derivarunt niſum *ad ipſius Sphæræ centrum*; eoque facto & directionem gravium, & figuram telluris ſphæricam conati ſunt exponere.

III. Contradixit Carteſianis inter complures alios præcipue *Chriſt. Hugenius*, ratus, ex iſto vorticis motu ſequi impulſum gravium non ad centrum totius ſphæræ, ſed ad centrum circulorum æquatori parallelorum, ſive ad axem; plane uti *Keplerus* dixerat, & ante Carteſium *ſchematiſmo* expreſſerat, in Epit. Aſtron. Copern. p. 97.

IV. Plauſibilius hoc eſt primo ſtatim intuitu, videtur enim rationi congruum, ſi duo corpora in circulari

ali-

aliquo plano ſimul mota inæquales niſus habeant, adeoque imbecillius a fortiori repellatur, ut illud repellatur *in eodem plano*, in quo utrumque nititur ulterius progredi. Placuit itaque id argumentum non paucis.

V. *Hugenius*, ne in ſola refutatione falſi ſubſiſtere videretur, & explicando phænomeno aliquid accommodum inveniret, pro obtinendis directionibus gravium ad horizontem perpendicularibus, & figura telluris prope ſphærica per vorticem generanda, ſubſtituit gyrationi Carteſianæ *aliam*, qua materia ſubtilis ſuperficiei ſphæricæ incluſa, infinite variis ſub illa ſuperficie directionibus movetur, ſecundum arculos circulorum ſphæræ maximorum. Cuiusmodi fere illud eſt, quo *Ioh. Chriſt. Sturmius* in Colleg. Curioſ. P. II. Epiſt. ad *Henr. Morum* §. 23. *p.* 23. innuit: circulos vel arcus potius, a ſingulis materiæ ſubtilis partibus deſcriptos, ita concipiendos eſſe, ut omnes gyrationis ſuæ impetum ab uno ſphæræ puncto nactæ intelligantur. Secuti ſunt Hugenianam niſuum rationem plures alii, & noviſſime *Cel. Wolfius* in Phyſico Syſtemate; difficultatem vero, vel, ſi mavis, impoſſibilitatem vorticis eiusmodi oppoſuerunt Sturmio *Iac. Bernoullius*, l. c. Actor. Lipſ. & Hugenio *Saurinus*.

VI. Novas ſcil. Carteſianæ cauſæ ſuppetias tulit *Cel. Saurin*, eandemque vacillantem conatus eſt omnino ſtabilire, editis duabus in hanc rem commentationibus, quarum prima in *Ephemerid. Erud. Gall. ad A.* 1703. p. 38. ſeq. obvia, non modo ſolvere Hugenianum adverſus Carteſianos vortices ratiocinium, ſed etiam demonſtrare ſategit, ex reactione ſuperficiei ſphæricæ, vor-

ticem

ticem fluidum ambientis, generari niſum ad ipſius ſphæræ centrum. Secunda in iisdem *Ephemerid. Gall. ad A.* 1707. *m. Maio* p. 327. & ſeqq. excuſa, primo quidem pro Carteſio vrget, ſi vel maxime vortex conciperetur ab initio Cylindricus, illum tamen ipſa ſui in vicinum fluidum preſſione redactum iri in figuram ſphæricam, vel ſpæroidicam; Deinde vero phænomenis naturæ multo magis reſpondere motum vorticis circa telluris axem ex occidente in orientem gyrantis, quam interruptas illas gyrationum, in circulis maximis factarum, portiones Hugenianas. Intelligo ex *Commentariis Acad. Scient. Pariſ. ad A.* 1709. p. 167. *edit. Batav.* oppoſuiſſe Saurinianæ meditationi primæ nonnulla viros Clar. *Parentium* & *Montreum*, ſed quæ ingenioſiſſimum Auctorem a ſententia ſua adeo non dimoverint, ut potius pro perfecte demonſtratis habeat, quæ A. 1703. in Hugenianas Demonſtrationes dixerit.

VII. Liceat ſine cuiusquam iniuria fateri, *me* in re adeo lubrica, & variis compoſita circumſtantiis, *ſemper nonnihil hæſiſſe* circa demonſtrationum hactenus exſtantium evidentiam, adeoque ſubinde optaſſe, ut res *experimento* decidi luculento poſſet; maxime cum viderem, ſummos viros v. g. *Jac. Bernoullium* l. c. ambiguos eſſe, an ex fundamento ſuperficiei ſphæricæ deduci poſſit, quod ad centrum potius ſphæræ, quam circuli paralleli tendat niſus corpuſculorum a peripheria propulſorum. Etſi enim mihi videbar intelligere rationem, cur futurum non ſit, ut ad centrum ſphæræ tendant corpuſcula; nolui tamen in re difficili meum interponere iudi-

iudicium; aut præcipitare concluſionem, nondum conſulta per experimentum natura.

8. Succurrit facile animo *notiſſimum Hugenii experimentum*, in cauſa gravium frequenter adhiberi ſolitum: quo is, aſſumto vaſe Cylindrico Diametri 8-10″. & altitudinis 4-5″, idem aqua & ceræ hiſpanicæ abraſis particulis replevit, vitro ſuperne obtectum, & tabulæ ligneæ impoſitum, cuius ope in gyrum agi celerrime poterat. Facto enim motu vaſis perniciſſimo, & inhibito iterum repente eodem motu, accidit, ut aqua diutius adhuc gyros continuaverit ſuos, & hiſpanicæ ceræ particulas circa centrum baſeos cylindri in cumulum quaſi hemiſphæricum coegerit. *Non* id tamen inſtituto *ſatisfecit* meo, quod ſubinde mihi videbatur, circumſtantias in hoc experimento tales miſceri, quales non admittant vortices ſive Carteſiani ſive Hugeniani, ſi qui in rerum natura occurrant ſphærici. Præcipue nuclei tantum hemiſphæroidici productio, & cylindricus vortex, & ſuſtentans corpora fundus vaſculi, ad huius quæſtionis definitionem minus convenire videbantur. Fig. 2.

IX. Cœpi igitur primo cogitare, annon ita inſtitui res poſſent, ut vice dimidiati *nucleus* prodiret *integer*; finis enim aſſumtorum a Carteſio & Hugenio vorticum cœleſtium eſt ſphæræ geneſis. Atque hic facile animum ſubiit cogitatio, ſi vas cylindricum in medio eſſet diviſum diaphragmate baſibus parallelo, & in parte eius inferiori miſcerentur aquæ corpuſcula non multo leviora ſpecifice, quam eſt aqua: futurum fortaſſis, ut inferne non minus dimidia nuclei pars in medio diaphragmatis colligeretur, quam ſuperne; maior aut minor pro mate-

 riæ,

riæ, quæ adhiberetur, maiori aut minori quantitate, aut diverſitate gravitatis ſpecificæ. Tentavi aliquid in eam rem, non ſine omni ſucceſſu: ſed difficilior tamen huius experimenti dextre capiendi ratio eſt, & vortex non deſinit eſſe cylindricus; ut de influxu gravitatis & levitatis corpuſculorum aquæ mixtorum in figuram nuclei nihil dicam. Quos enim ego obtinui nucleos, ſphærici profecto non fuerunt.

X. Viſum igitur eſt, vortices eiusmodi cylindricos, tanquam ab hoc naturæ facto remotiores, adhuc miſſos facere, eandemque *propius* imitari; *excitato vortice* potius *ſphærico*, in quo ad imitationem Hugeniani experimenti, corpuſcula ſpecifice graviora primo quidem ab aqua in vaſe gyrante mota abriperentur; adeoque, ut coniectura erat, durante quidem vaſis gyratione extremum occuparent; ſed ceſſante illa ab aqua diutius motum continuante ad interiora pellerentur; exhibitura figuram, uti facile coniicere licebat, ſive ſphæricam ſive cylindricam.

XI. Id conſilium, iam ante tres vel quatuor annos captum, non licuit executioni dare, niſi paucis abhinc hebdomadis; adhibitis in eam rem vitris & machinis, quibus ad lumen manus affrictu excitandum *Hauksbeius* primo & deinde cæteri hucusque uſi ſunt: *feliciori*, quam prius divinaveram, ſucceſſu. Cum enim animus eſſet attendere ad figuram, quam ceſſante vitri motu, gyrante autem ſola in illo aqua, partes ceræ hiſpanicæ, ab aqua propulſæ, acquiſituræ eſſent; aër, qui ſeſe invito mihi obtruſerat, & paſſim ab aqua ſe ſeparaverat, durante & vitri & aquæ motu gyrante talem induit figuram,

ut

ut non gravate ferrem, turbari ab illo motum ceræ & aquæ ad quietem redeuntis; conſequenter geneſin figuræ, quam a ceræ memoratæ particulis expectaveram, eludi.

XII. Experimenti illius aliquoties, & *coram Societate*, facti circumſtantiæ potiores hæ ſunt:

Experimentum.

Aſſumpſi vitrum utcunque ſphæricum; diameter enim æquatoris maior eſt cæteris, & Poli deſinunt in conum quaſi quendam truncatum. Inſtructum illud eſt circa polos ſuos cylindris metallicis, prominente axiculo dotatis, in quorum altero conſpicitur rotula minor fixa, cui filum circumduci poteſt, præſente in eum finem crena. Id vitrum per foramen cylindri alterius implevi aqua, pauco pulvere ceræ hiſpanicæ nigræ & ſcobe ferrea: aptavique ad machinam, cuius ope alioquin pro excitando per affrictum lumine rotationes ſimilium ſphærarum vitrearum fieri ſolent. *Fig. 4.*

XIII. His factis cœpi verſare manubrium machinæ prædictæ, ut gyros agere vitrum inciperet, vidique:

1. Superius in vitro ſeſe oſtendere bullam (uti dicitur, vel potius ſegmentum) aëris, quæ inſtituta rotatione deflecteret in eam partem, in quam dirigebatur rotatio.

2. Scindi vero illam in medio ſui, antequam deflectat, per aquam extima ſphæræ loca affectantem.

3. Continuato paululum motu, ceræ & ferri pulverem adhærere lateribus vaſis circa æquatorem motus, per modum zonæ; poſtquam antea iam

4. Aliquot impulſibus ſuperne proiectus iterum ſua gravitate decidiſſet.

5. Ceſſante vitri motu aërem interturbare aſcenſu ſuo motum aquæ, & ſic impedire, quo minus ſuccedere ſperata ceræ & ſcobis ad centrum vel axem impulſio regularis fieri poſſet. Hoc *primum* tentamen erat.

XIV. Repleto igitur *iterum* vitro, ſic, ut, cum inverteretur, nulla ſuperius bullula aërea conſpici amplius poſſet, incoavi denuo gyrationem, & obſervavi:

6. Paſſim erumpere in aqua bullulas aëris minores, & colligi in maiuſculas, & ceſſante deinceps motu, vidi earum plurimas adhærere particulis ceræ hiſpanicæ

7. Facto concitatiore motu aëreas illas particulas ex latere, in quod *nro.* 1. deflectebant, propius ſubinde ad axem ſphæræ & rotationis accedere.

8. Tandemque elegantem viſui exhibere cylindrum, eundemque

9. Prout motus gyrationis fieret velocior, graciliorem; in quo tamen

10. Bullulæ illæ aëreæ inter ſeſe contiguæ non erant, ſed inter aqueas gyrabant.

11. Remittente nonnihil motus celeritate cylindrus ille aqueo-aëreus reddebatur Diametri amplioris, adeoque laxioris, ut ſic dicam, mixtionis.

12. An aucta motus pernicitate colligi bullæ illæ in cylindrum continuum poſſint, nolui tentare metu damni, quod fortaſſis vitro inferri poſſit, hactenus unico ad hoc experimentum.

13. Si motu remiſſiori bullulæ antea ſeparatæ coibant in maiores, figura earum ſphærica non fuit, ſed latior

tior ex ea parte, ex qua aquæ rotantis impulſus adveniebat, auctior ex oppoſita.

14. Elegantiſſimum fuit ſpectaculum, quod admiſſo in maiori copia aëre, & cylindro adhuc valde amplo, conſpiciendum ſeſe præbuit, dum bullulæ quædam aëreæ non tranſibant centrum vorticis ſphærici, ſed ex latere dextro, quorſum deſcendens aqua tendebat, faciebant gyros quaſi ellipticos, aliæ centrum vorticis transgreſſæ ſpiras, quales pro motu planetarum Caſſinus deſcripſit in Memoir. de l'Acad. 1709. p. 328. Sit LMNO ſectio æquatoris, vel circuli ad illum paralleli in vitro ſphærico: Sit ABCD ſectio Cylindri: repræſentabit *abcd* gyrum unum, & EFGHI gyros alteros utcunque expreſſos imitatione liberiori. *Fig.* 5.

15. Cum ſiſteretur motus vitri, & cylindrus aëreo-aqueus eſſet nonnihil amplior, vidi poſt parvulam morulam coarctari cylindrum illum adhuc gyrantem, & tum demum fieri iterum ampliorem, & diſſolvi.

16. Aſcendere tandem bullulas aëreas ad ſummitatem, ſed maiores plerasque motu retrogrado potius, quam directo. Exprimat ABC directionem aquæ in vaſe iam quieſcente. Sit B ſummitas eius, rotetur bullula ſecundum *pqrs*: rariſſime fiebat, ut veniret ex *p* per *q* in B, ſed venientes ex *q* per *r* in *s*, inde regrediebantur in B ibidem poſtmodum hæſuræ. *Fig.* 6.

XV. Cætera, quæ in hiſce tentaminibus ex occaſione obſervavimus, fere huc redeunt:

17. Cera Hiſpanica & limatura Martis faciebant zonam, ſive zodiacum quaſi quendam circa æquatorem. *Fig.* 7.

18. Inæqualis tamen denſitatis, &, ſi ad minutias reſpicere placeat, latitudinis.

19. Erat pars eius, quæ ſeſe, remittente paulu- lum velocitate rotationis, a reliqua ſeparabat, & ab æquatore plus vel minus recedebat, Tropicum repræſentans, aut Polarem circulum.

20. Mobilis illa, prout intendebatur motus, vel remittebatur nonnihil, adeoque ſpiras agens in ſuperficie ſphæræ concava, &

21. Si multum minuebatur motus celeritas, abſcondebat ſeſe pars illa in cylindros polares.

22. Si motus vitri inhibebatur, pars pulveris circa æquatorem vorticis hærens decidebat gravitate ſua, ſed irregulariter, ob turbas ab aſcendentibus hinc inde bullulis aëreis factas.

XVI. In prioribus tentaminibus nequidem $\frac{1}{1000}$ capacitatis vaſis repleta erat aëre, ſed cum aëris copia maior admittebatur, ut $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ partem vaſis occuparet, & velocitas gyrationis nonnihil intendebatur:

23. Collectus eſt aër in cylindrum, circa medium ſphæræ, ab omni aqua liberum, cuius intima ſuperficies apparebat politiſſima;

24. Neque magna rotationis celeritas requiſita eſt, ad conſervandum huncce nucleum cylindricum, poſtquam ſemel genitus erat;

25. Manebatque, inhibito licet ſphæræ motu, tamdiu, donec aqua gyrans ob affrictum ad vitri latera motum & niſum ſuum amitteret.

Con-

Concluſiones.

XVII. Enarratis hucusque Phænomenis facile foret, in cauſas uniuscuiusque ſingulatim inquirere; facile etiam, oſtendere leges vorticum, quibus obtineri poſſunt phænomena pro deſperatis habita; v. gr. ſpirales alternatim maiores, minoresque corporum cœleſtium, & ſimilia. Non id vero præſentis inſtituti eſt, quo hoc unum agimus, ut figuram nuclei a vortice ſphærico generandi definiamus; eoque ipſo *viam* ſternamus *ad* ſolvendum *Problema Mechanicum*, quo leges vorticum tales requiruntur, ut nucleus oriatur ſphæricus.

XVIII. D*uas* igitur *concluſiones* hic potiſſimum inferimus: *altera* rem ſpectat, *altera* pertinet ad modum ratiocinandi de vorticibus: Vtraque in exponenda gravitatis cauſa utilis & neceſſaria videtur.

XIX. Conſtat igitur experimenti fide, & oculorum teſtimonio; *in vortice ſphærico circa axem ſphæræ rotato, corpuſcula cedentia*, hoc eſt, ea, quæ ab impulſu fluidi vorticoſi a peripheria verſus medium pelluntur, *non coire in nucleum ſphæricum, ſed cylindricum*: Itaque ex ſolo eiusmodi vortice non ſatis exacte deduci directionem corporum cedentium verſus centrum vorticis, ſed illam tendere ad axem gyrationis.

XX. C*eſſat* itaque *dubium*, quo hactenus in diverſa diſtracti fuerunt eruditi, poſtquam natura exemplo oculis obvio prodidit, quid in obſcuro faciat, cum vortices rotat ex Carteſii præcepto. Puto autem, ſatis commode in hoc experimento exprimi conditiones deſiderati vorticis. Habemus fluidum, ſuperficie ſphærica comprehenſum, & actum in gyros circa axem ſphæræ.

XXI.

XXI. Verum eſt, motum rotatorium imprimi aquæ per actionem ſuperficiei ambientis, eandemque ſimul cum aqua ferri in eandem plagam; Fortaſſis pro Carteſio dicas, motum vorticoſum *in natura aliter* impreſſum eſſe, & ſuperficiem concludentem quieſcere. *Non id* vero illationi noſtræ *officiet*. Quicquid ſit de modo, quo vortici motus ab initio imprimitur, conſideramus illum in ſtatu manenti. Quo caſu neque officit ſuperficiei extimæ quies, uti vidimus *nro*. 15. & 25. in experimentis. Manet igitur, quod §. 19. diximus.

XXII. Alterum hoc eſto: *Pro iudicanda directione vis centrifugæ particularum fluidi circa axem rotantium conſiderari debet illud planum, quod æquatori parallelum eſt*, non vero planum meridiani, vel alterius circuli in in ſphæra maximi. Patet id ex figura nuclei cylindrica, vi cuius directio corporum cedentium eſt perpendicularis ad axem in planis æquatori parallelis.

XXIII. *Iuvat* autem hoc attendere, quoniam, ſi *ratiocinio* agere *ſolo* vellemus, poſſet res videri dubia. Ex *una* quidem parte ſic infero: quoniam ipſe motus, a quo vis centrifuga oritur, non fertur ſecundum meridianum vorticis, vel circuli alterius maximi æquatorem ſecantis, ſed ſecundum circulos æquatori parallelos: igitur & directio vis centrifugæ particulæ cuiuscunque erit in planis æquatori parallelis.

XXIV. Ex *altera* autem parte ſuperficiem attendendo ſphæricam alia ab aliis æſtimatio eruta eſt. *Iac. Bernoullius*, loco ſuperius citato ingenioſe monet, plana circuli paralleli, v. g. tropici, & circuli maximi v. g. eclipticæ ſeſe interſecare in linea, quæ utriusque circuli

tan-

tangens ſit. Si ergo punctum contactus, rotari incipiens iuxta ductum tropici, conatum habeat recedendi per tangentem, hactenus æque æſtimari poſſe, quod recedat a centro Eclipticæ, atque a centro tropici, cum eadem ſit utriusque tangens. Nullam igitur rationem eſſe, cur pulſio globulorum fiat in plano verticali potius, quam in plano circuli paralleli, vel quovis alio, cum tangens illa, ſecundum quam recedere conatur globulus, infinitis planis ſit communis. Ambigit itaque hoc loco Vir eximius ob ſphæræ rationem.

XXV. *Alibi* ex hac ipſa conſideratione pronunciat pro Carteſio. Poſtquam enim in iisdem Actis A. 1695. p. 547. de preſſione fluidorum adverſus latera vaſorum annotaverat, fieri illam perpendiculariter ad ſuperficiem continentem, ex eo intulit, directionem corpuſculorum retro impulſorum ferri erga centrum ſphæræ, quæ ſcilicet ſola ſit ad ſuperficiem perpendicularis.

XXVI. *Alio* nonnihil *modo* ad eandem pervenit concluſionem *Cel. Saurinus*, Iourn. des Savans, A. 1703. M. Ian. p. 40. 41. Ille, conceſſo, quod particulæ cedentes ferrentur directe ad axem, ſi circulus æquatori parallelus conciperetur ſeorſim, aut in vortice cylindrico conſtitutus: negat, idem obtinere, ſi fluidum ſuperficie comprehendatur ſphærica. Meretur ingenioſa Viri Cel. annotatio, ut & hoc loco legatur:

Il eſt clair, que la matiere fluide, qui dans le plan „ *du cercle parallele, dont le Diameter eſt* DN, *fait effort* „ *pour s'éloigner du point* O *ſuivant* OD, *& qui par ſon* „ *effort pouſſe au point* C *la ſurface ſpherique, dont le cer-* „ *cle* PAQE *eſt une ſection par l'axe*; *il eſt clair dis-je*, „

" *que cette matiere n'eſt pas autrement repouſsée par la*
" *ſurface, qu'elle pouſſe, qu'elle le ſeroit par un plan, qui*
" *toucheroit cette ſurface au point* D. *Ainſi ſelon les loix*
" *de la Mechanique, ſon effort en ce point eſt reflechi con-*
" *tre le fluide, qui eſt a coté, ſuivant la corde* DM *egale a*
" DN; *or cet effort étant ſoutenu par la reaction du flui-*
" *de ſuivant la meme corde* MD, *il s'enſuit, que la ſurfa-*
" *ce ſpherique eſt preſsée au point* D *par deux forces ega-*
" *les, doint l'une agit ſuivant* OD, *&* *l'autre ſuivant* MD,
" *d'ou reſulte dans ce point de la ſurface une impreſſion ſui-*
" *vant la direction* CD, *qui eſt celle de la Diagonale du*
" *parallelogramme fait par les deux cordes* MD, ND. *Si*
" *l'on met donc maintenaut au point* D *un corps groſſier,*
" *qui ne faſſe aucun effort par lui meme, la matiere flui-*
" *de, qui agit ſuivant* OD, *& celle, qui exerce ſa reaction*
" *ſuivant* MD *prendront le deſſus avec un égal effort, &*
" *le pouſſeront ſuivant* DC *vers le point* C, *qui eſt le centre*
" *du tourbillon, & non pas vers le point* O, *qui eſt le cen-*
" *tre du cercle parallele. Et comme le meme raiſonnement*
" *a lieu, quelque plan du cercle que l'on conſidere, & dans*
" *quelque point du plan que l'on ſuppoſe le corps groſſier, il*
" *me paroit demontré, que dans l'hipothéſe de Mr. de*
" *Cartes les corps peſants doivent ſuivre par tout en tom-*
" *bant la même direction, qui tend au centre de la terre,*
" *conformement a l'experience, & contre l'obiection pro-*
" *poſée.* &c.

XXVII. Quorſum iſta? ſcilicet ut intelligatur, quod dubium eſſe poterat Viris utique magnis, ſed ratiocinantibus tantum, id vel tyroni experimentum capienti obvium & in aprico fuiſſe. Nimirum ex peripheria po-

tius

tius circuli rotando deſcripti ſumendas eſſe perpendiculares lineas, quam ex ſuperficie ambiente; quia *non tam ad ſuperficiem concludentem perpendicularis eſt directio corpuſculorum cedentium, quam ad axem gyrationis.* §. 19. Quid futurum putas, ſi ſuperficies fuerit Elliptica, ſi Parabolica, aut utcunque genita ex rotatione curvæ ABCDE circa axem? Fallor? an concipi illa debet, ut compoſita *ex infinitis cylindrulis contiguis* rotatione elementorum PM*mp* genitis? *vel*, ſi mavis, ex infinitis *annulis cylindricis* ſeſe ambientibus, & eundem axem habentibus? *Fig. 9.*

XXVIII. Saltim hoc certum eſt, *per vortices Carteſianos generari nucleos cylindricos.*

Coniectura.

XXIX. Quæritur, *quid fieri debeat, ut nuclei exſurgant ſphærici*? Hoc artis eſſe communiter exiſtimant; credo, quoniam ſimplicibus neglectis maiora ſectantur artificia. Præmiſſis, quæ dixi, non eſt problema hoc difficile. Accipe methodum, quæ me ad ſolutionem perduxit.

XXX. Vidimus, excitato vortice Sphærico, cuius *axis* AB ſit *horizonti parallelus*, obtineri cylindrum quoque *abcd*, cuius axis AB horizonti parallelus eſt. Supponamus nunc *axem* rotationis EF *verticalem* horizonti, & abſtrahamus ab eo, quod ſive gravitas ſive levitas corporum inducere poteſt, diſcrimine: obtinebitur cylindrus quoque *eſgh*, cuius axis EF eſt ad horizontem verticalis. Si *utrumque motum* ſupponas coniungi, ob actionem alteram, quæ a rotatione ſecundum axem AB pendet, cogetur cylindrus *eſgh* ab *h* verſus *i*, & ab *e* ver- *Fig. 10.*

 ſus

ſus *k*, a *g* verſus *l*, & ab *f* verſus *m*; vice verſa ob actionem a rotatione ſecundum axem EF pendentem, urgebitur pars cylindri *abcd*, ab *a* & *d* verſus *i* & *l*, atque a *b* & *c* verſus *k* & *m*: *qualis* inde *figura* enaſcitur?

XXXI. Primo quidem intuitu videtur, emergere *communem* duorum *cylindrorum abcd* & *efgh* (ſed qui diametrum nonnihil ampliorem acquirant) *ſectionem*, hic per *iklm* utcunque repræſentatam: futurum adeoque corpus anguloſum, cuius anguli in *i. k. l. m.* cadant in medio quadrantum AE, EB, BF, FA. Quique adeo evitari non poſſint, niſi per novam rotationem ſecundum axes *no* & *pq*, qua ſuppoſita anguli iterum incidant in medio ſpatiorum EO, OB & ſic porro: ut adeo ad evitandos tandem angulos omnes deveniendum ſit ad hypotheſin *Hugenianam*, de rotatione ſecundum axes omnes poſſibiles, ſive quod idem eſt, de receſſu fluidi gyrantis ſecundum omnes circulos maximos.

XXXII. Sed vero facile eſt, evitare iſthæc devia, ſi attendatur ad geneſin cylindrorum *abcd* & *efgh*. oritur nimirum cylindrus *abcd* ex eo, quod facta gyratione circa axem AB unaquæque bullula nititur verſus punctum aliquod axis AB: & cylindrus *efgh* ex eo, quod facta gyratione circa axem EF unaquæque nititur verſus punctum aliquod axeos EF. Coniuncta igitur utraque rotatione unaquæque bullula nititur *in utrumque axem*.

XXXIII. Ut in *punctum* utrique axi *commune*, adeoque in centrum ſphæræ nitatur, ſic obtineas. Sit uterque vortex æqualiter fortis; ſit fluidi gyrantis & particularum illi immerſarum ea ratio, ut vires corpuſculorum cedentium centripetæ fiant directe uti diſtantiæ ab axe: mani-

manifeſtum eſt, in corpuſculo cedente niſum oriri compoſitum, cuius directio TO eſt diagonalis laterum TQ & TP ad centrum ſphæræ tendens. Duplici igitur hac rotatione combinata, *nucleus* orietur *ſphæricus*; namque illud receptum eſt, ut ſphærica nuclei figura derivetur ex directione corpuſculorum verſus centrum.

XXXIV. Si tamen hæreas: finge corpus anguloſum, cuius ſectio ſit, v. g. *abcd.* Per hypotheſes §. 33. vis cuiusque particulæ nitentis verſus centrum, erit proportionalis diſtantiæ eius a centro *bo*, *eo*, *ſo*, itaque remotior *b* dimovebit lateraliter proximas ſibi particulas *e* & *f*: donec omnes ſint in æquilibrio & æquidiſtantes a centro; hoc eſt, donec nucleus ſit ſphæricus. *Fig.* 11.

XXXV. Hæc abſtracte dicta eo ſufficiant, ut intelligas, quid ad geneſin nuclei in vortice ſphærici requiratur, & quid ſufficiat? Quomodo id obtineri *experimento* poſſit, ſequenti diſſertatione exponam. Tum vero ſimul indicabo, quousque hæc ad doctrinam *gravitatis* Mechanicam aut Phyſicam applicari poſſint, & non poſſint? Putamus enim, nos in eo argumento aliquid profeciſſe, ſed plura etiamnum reſtare.

Annotatio ad §. 35.

Iſta ſuo tempore. Quae autem hic *de gravitate* polliceor, ſingulari diſſertatione poſtea perſecutus ſum. Ea nunc Lutetiae Pariſiorum excuditur, quoniam nuperrime praemio affecta eſt ab *Ill.* *Academia Scientiarum Pariſina.* In ſequentibus igitur non tam ad huius doctrinae *applicationem* reſpicio, quam ad eius confirmationem et amplificationem. M. Iun. 1728.

* Ad §. 16. lin. 1. nota, *pro* $\frac{1}{1000}$ *legendum eſſe* $\frac{1}{100}$, et in marg. §. 3. ad lin. ult. *fig.* 1.

DESCRIPTIO VASORVM CHYLIFERORVM.

Auct.

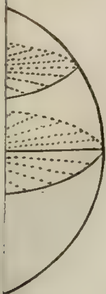
Joan. Georg. Du Vernoi.

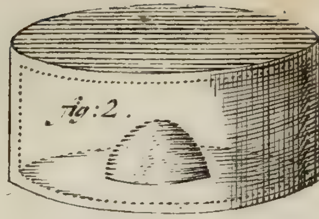
M. Iun. 1726.

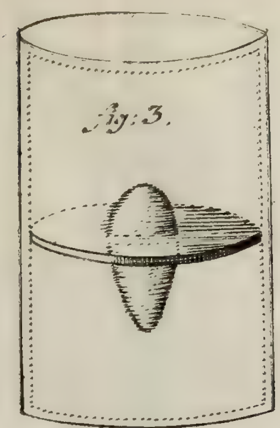
AD vitam Animantium conſervandam, etiã omnes certatim partes unitis viribus conſpirent , organa tamen nutritioni dicata præcipua vitæ fulcra dici, eamque ob cauſam in Anatomiis publicis choream ducere merentur. Quamobrem hæcce iterum exactiſſime oculo perluſtrare , ultimamque manum illis ſpeciatim partibus imponere , quibus ad cor alibilis ſuccus naturaliter deferri ſolet, haud ſupervacaneum nobis viſum eſt. Namque , id obiter dixerim , de eo minime dubitandum eſt, diſſectiones hominum non unius tantum , ſed diverſarum terrarum , Rei univerſæ anatomicæ magnam utilitatem allaturas, quia fieri poteſt , ut vis climatis , aut educationis , partes variis modis immutet, quibus dein variationibus anatome plurimum aut adiuvari , aut impediri poteſt, quod æque de anatome comparata affirmandum eſt.

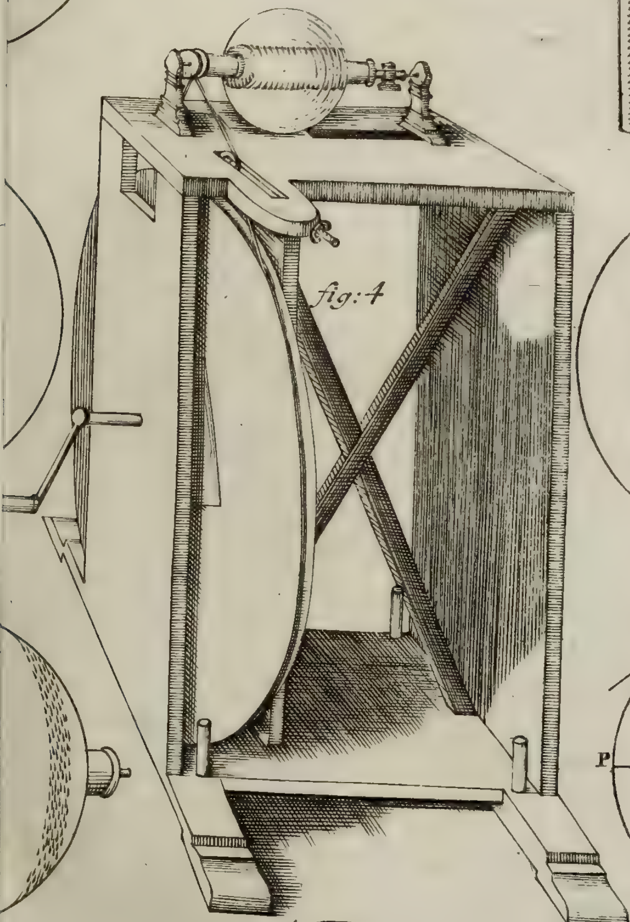
Origines vaſorum chylifer. hactenus incognitæ & quare?

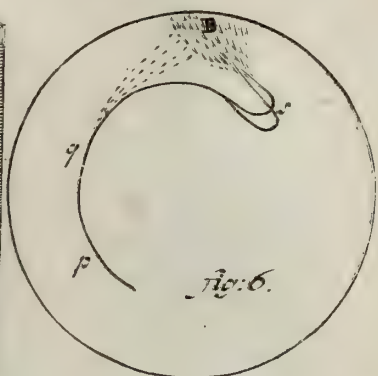
Si qua in re, certe in venarum tum in genere, tum in ſpecie chyliferarum originibus inveſtigandis vehementer laborant anatomici : Difficultatis tamen veram cauſam non declarant, quam plurimorum cadaverum inſpectione

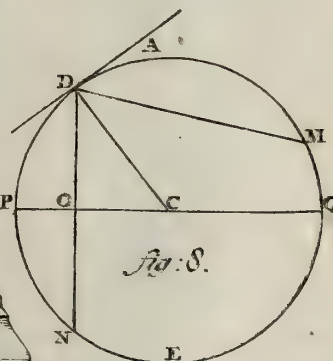


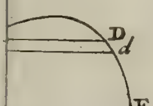

fig: 2.

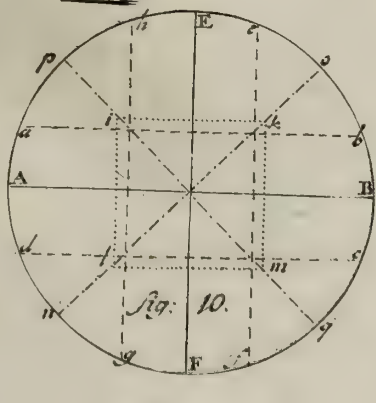

fig: 3.

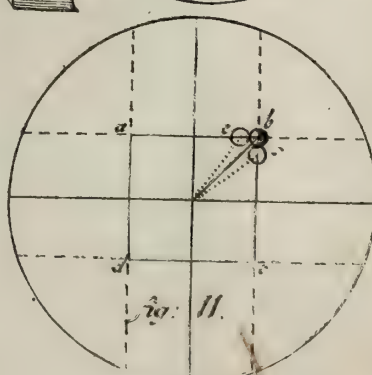

fig: 4

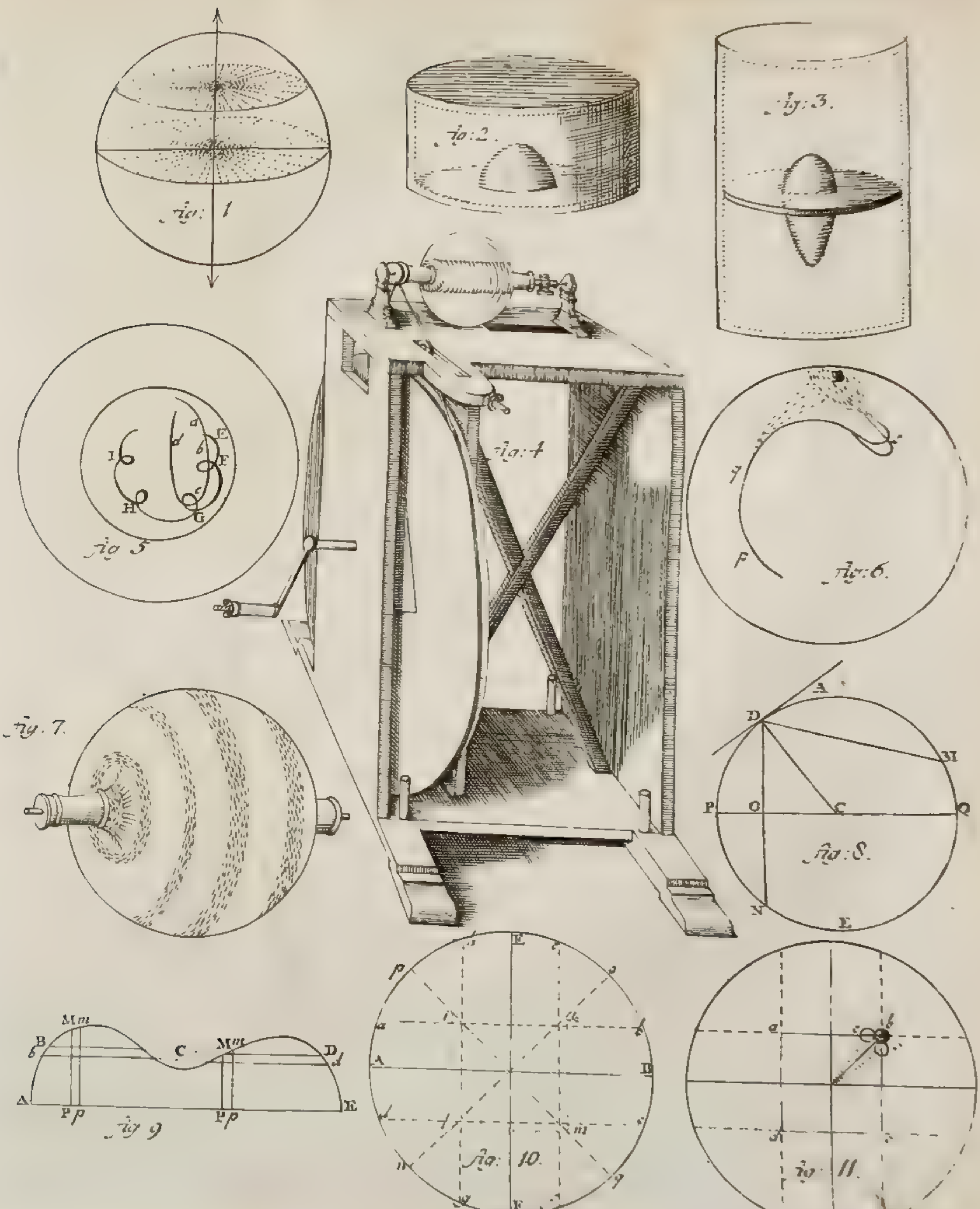

B
f
q
p
fig: 6.


A
D
M
P
O
C
Q
fig: 8.
N
E


D
d
E


h
E
e
p
o
a
i
k
b
A
B
d
l
m
c
n
fig: 10.
q
g
F


a
e
b
d
fig: 11.


fig: 1
fig: 2
fig: 3
fig: 4
fig 5
fig: 6
fig. 7
fig: 8
fig 9
fig: 10.
fig. 11.

ne edoctus hanc eſſe deprehendi. Illi valde hallucinantur, qui putant, vaſa chylifera, quæ ſuper inteſtina niveo colore extus apparent, intus eodem colore infecta eſſe, quæ opinio me ipſum ſæpius quoque fefellit, quando aperiebam cadavera optima, in quibus tota ſuperficies exterior, copioſiſſimis vaſculis, eaque chylo in iis conglaciato referta erat. Inteſtina ſine mora incidebam, poſtea fotu calidæ emolliebam, & alia eiusmodi artificia, in ſpem origines quæſitas inveniendi; ſed incaſſum omnia. Huius infelicis ſucceſſus cauſa, in chyli diverſitatem, potius reiicienda eſt, quam in exilitatem vaſculorum, quæ quidem maxima eſt: Nam albedo chyli ea minus inconſpicua ſineret, verum potius ſpecie filorum argenteorum manifeſtaret. Res equidem notiſſima eſt, eam chyli proprietatem eſſe, ut chamæleonte mutabilior ſit, hoc eſt, varians ſecundum differentiam locorum ſeu partium, quas inhabitat: Raro enim aut nunquam eius color, dum in inteſtino adhuc fluctuat, cum colore eiusdem iam convaſati coincidit. Ille ob ſubſtantiarum heterogenearum admixtionem cineritio flaveſcentis, hic lactei coloris eſt, ut diſſectiones cadaverum me edocuerunt; & quia colore flaveſcente interior ſuperficies inteſtini ante infecta eſt, ob hancce cauſam infelix quædam obnubilatio exoritur, conſpectum horum vaſculorum præpediens, & fere impoſſibilem efficiens. Obvium eſt filtri exemplum, quo hocce phœnomenum illuſtrare licet. Quando liquores colorati probe agitati filtro iniiciuntur, alio colore tingi internam, alio externam ſuperficiem obſervamus, quoniam in tranſitu purificatio ſeu depuratio, ſicque immutatio coloris producitur:

Par-

Particulæ enim tenuiores & magis dilutæ ſolæ tranſeunt, craſſiores vero intus retinentur. Idem fere accidit, in inteſtinis chylum transcolantibus, uti experientia teſtatur.

Aliud non infrequens impedimentum occurrit, quo obſtante ad optatam metam pervenire non licet. Interdum enim accidit, ut vaſa chylifera, quæ ſuper inteſtina deambulant, chylo diſtenta videantur; E contra parte, qua cavitatem reſpiciunt, vacua & inanita, adeoque inconſpicua reperiantur, quod a variis cauſis provenire poteſt.

Propter dictas rationes, origines vaſorum chyliferorum, ſive locum, quo enaſcuntur, nemo adhuc aſſecutus eſt. Per locum non intelligimus hoc vel illud inteſtinum, prout titulo gracilis aut craſſi inſigniri ſolet: Nam controverſiam iſtam de ortu chyliferorum inferius aptiore occaſione pertractabimus. Hic per locum intelligendum eſt, pars illa determinata inteſtini, in qua radices ſeu oſcula chyliferorum ductuum implantantur. Unumquodque enim inteſtinum ampliſſima ſuperficie, variisque particulis in ea contentis a natura præditum eſt; quæ particulæ modo iuga, modo profunditates efformant, uti ſatis notum eſt. Quare iure poſtulo, ut certus locus aſſignetur, ex quo origo chyliferorum derivari poſſit. Omnes Anatomici, quotquot a temporibus *Aſellii* & *Pecqueti* de vaſis chyliferis commentati ſunt (excepto uno *Cowpero*, qui ex arteriis Meſaraicis novam eorum ſuppeditavit originem) adeoque nuperrimus quoque isque diligentiſſimus Profeſtor Italus, a tota inteſtini ſuperficie chyliferorum ortum derivant, hancque innume-

numerabilibus oſculis pertuſam eſſe absque dubitatione pronuntiant. Experimenta tamen non invenio, uti neceſſarium eſt, ad dubitationem omnem tollendam, nulla quoque rationum momenta, quibus experimentorum defectus ſuppleatur. Nam, quod chyli copiam attinet, novimus diſtributionem chyli non raptim, ſed ſucceſſive perfici, hinc non tanto vaſculorum numero opus eſſe, ad chylum exhauriendum. Quod poros attinet creberrimos, in inteſtinis obſervatos, novimus certo, a poris in palato, oeſophago & ſtomacho exſtantibus, haud diverſos adeoque glandularum inteſtinalium tantum emiſſaria eſſe. Quod denique frequentiam chyliferorum in extima ſuperficie attinet, etſi ea ſuper totam inteſtini ſuperficiem, magna copia ſine ordine diſcurrere nonnullis viſum ſit, incertum adhuc eſt, quanam intus lege enaſcantur? an numerus internus reſpondeat exteriori &c. Plura non addam, quia ſatis apparet, non ut aſſertum, ſed ut coniecturam accipiendum eſſe, quicquid ſuper origine vaſorum chyliferorum ab anatomicis hactenus divulgatum eſt. Si noſtræ obſervationes ægre fidem invenerint, quia vel novæ vel difficilioris indaginis ſunt, non ſumus valde ſuccenſuri, quia ſingulari artificio nobis revelata ſunt, quæcunque hocce ſcripto continentur.

Origines vaſorum chylif. detectæ.

Locus aliquis ſeparatus in cavo inteſtini exſtat, in quo, reliqua tota ſuperficie excluſa, radices chyliferorum ductuum ſeu eorum oſcula implantata ſunt. Hæc iam pridem celeberrimi Angli cogitata fuere, uti verba ipſius teſtantur: " *Fortaſſe lacteæ in plicas inteſtini terminatæ, tenuiorem & magis aquoſam chyli partem abſorbent*; Gliſſonius.

L l " *ſunt*

"*ſunt enim ſpongioſæ, & nonnihil prominent in ipſum chy-*
"*lum, qui iisdem in ſuo deſcenſu affricatur. Veriſimile eſt*
"*hic loci aquas, quæ mox ab ingurgitatione profuſa per u-*
"*rinam redduntur, primo abliguriri. Neceſſe enim eſt,*
"*ut in tranſitu non diu morentur, cum parum immutatæ*
"*mox mictu excernantur. Si vero deſcenderent per totum*
"*tractum ilei ad initium coli, certe non per urinam, aſt per*
"*ſedem egrederentur.*" De valvulis quidem inteſtini, quæ hactenus chyliferorum conſortio deſtitutæ credebantur, præcipue hic ſermo eſt, quæ opinio noſtro ſatis invento præludere videtur. Hocce tamen inventum, quod ſenſuum teſtimonio nititur, quodque induſtriæ, non vero opinioni debemus, longe alia includit, uti mox ſumus expoſituri.

Valvulæ inteſtinal. originem dant omnibus vaſis chylum vehentibus.

Inteſtinales valvulæ, non ſolum chyliferorum conſortio participant, ſed auſim dicere, has ſolas iſto frui privilegio in toto inteſtino. Nam per novam rationem præparandi inteſtina, vaſorumque chyliferorum ſemitas in cavum usque inteſtini, uti ſæpius factum eſt, perſequendi, ne umbram horum vaſculorum in cava ſuperficie inteſtini, etſi exterior iis ſatis referta eſſet, internoſcere potui, nonniſi ſero veram huius effectus cauſam, quam ab initio difficultati regreſſus tribuebam, intelligens. Nequaquam vero propter hanc difficultatem regreſſus, quam probe novi, conatus in hacce diſquiſitione irriti fiunt, ut plerique ſibi imaginantur: Hæc enim difficultas tandem vinci & ſuperari poteſt. Verum id accidit propter impoſſibilitatem res inveniendi & videndi, ubi non ſunt, aut ubi acies oculorum pertingere non valet. Vnicum fontem ac originem, nimirum valvulas inteſtinales, in quibus tanquam aptiore & editiore loco

vaſa

vaſa chylifera prudentiſſime diſpoſita ſunt, animadvertere nobis licuit. In ſumma valvularum crepidine ſeu fine, oſcula chyliferorum ſic conſpeximus, ut preſſione digito, deorſum verſus dictam crepidinem facta, liquor foras iniectus, e quibusdam oſculis ſub tenuiſſimi roris ſpecie in cavum inteſtini proſiliret. Quum porro, adhibita ſumma diligentia, exitum materiæ in nulla alia parte valvulæ, quam in ima, fieri cognoſceremus, hic proinde ſtatuendum eſſe principium chyliferorum iudicavimus. Intentio quoque erat numerum, diſpoſitionem & conformationem minimorum oſculorum ſimul obſervandi, ſi per incredibilem eorum anguſtiam lubricitatemque valvularum, licuiſſet. Summa oſculorum, quæ unaquaque valvula comprehenduntur, incerta eſt, attamen mediocris, quantum ego coniicere valeo. Numerare eorum plexus per cava inteſtini diſtributos non ita difficile eſt, quoniam in unaquaque valvula unus plexus naturaliter continetur, quare neceſſe eſt, ut ſumma plexuum æqualis ſit ſummæ valvularum, ſimulque diſtantia plexuum, ut diſtantia valvularum, quæ trium linearum eſt. Plexuum figura circularis eſt inſtar coronæ: Nam ſicuti in palpebrarum tarſis, ita in limbo valvularum, orificia chyliferorum ea ratione diſpoſita ſunt, ut totum ambitum compleant, quod ex eo ſatis evidens eſt, quia nulla alia parte valvulæ, quam ima, exitus materiæ iniectæ obſervatur. *Oſcula vaſorum chylif. in coronam diſpoſita.*

Totum itaque artificium, quod ſub hacce chyliferorum detecta ſtructura contentum eſt, in hoc conſiſtere videtur. Primo, quum chylifera diſtinctum vaſorum genus, cuius actio, parenchyma inteſtini proprie non ſpectat, ſed chylum ſolummodo vel liquida eius cavo innatantia, conſtituant

ſtituant, ob hanc cauſam ſic diſpoſita ſunt, ut extra ſuperficiem inteſtini multum promineant & caput, ut ita loquar, erigant, quia valvulæ per circulos concentricos diſpoſitæ, profunde in cavum inteſtini ſeſe demittunt. Propterea quando inteſtinum chylo aut ſubſtantiis quibuscunque liquidis abundat, motuque periſtaltico cietur, quando in ſyſtole eius parictes propius accedunt, valvularumque diameter minor; viceverſa in ſubſequente diaſtole latera recedunt, adeoque valvularum diameter maior efficitur, neceſſe eſt, ut valvulæ una cum orificiis in coronam diſpoſitis, liquidis præterlabentibus ſæpius intingantur, ſicque repetitis immerſionibus & emerſionibus, pars fluidiſſima, quæ orificiis chyliferorum quaſi affricatur, ingreſſum inveniat, regreſſum vero impediant valvulæ frequentiſſimæ dictis vaſis incluſæ. Secundo quia plurimum intereſt, ut talis diſpoſitio chyliferorum, quam minime labefactetur, ideo duplicatura valvulæ, ceu theca, incluſa ſunt, quia primæ viæ magis quam cæteræ partes iniuriis obnoxiæ & expoſitæ ſunt: Præcipue vero tubulis chyliferis in ſitu perpendiculari retinendis, latera valvulæ multum inſervire videntur, prout natura actionis requirit.

His omnibus circa ortum chyliferorum prolatis manifeſtum eſt, in toto inteſtino valvulas nobiliſſimas & primarias partes eſſe, licet uſus cæteros hiſce aſſignatos eapropter falſos eſſe minime cenſendum ſit.

Inceſſus chylif. in dorſo inteſtini.

Quod ad reptatum chyliferorum ſuper inteſtini dorſum ſpectat, quamquam non ea induſtria & ſedulitate pro reptatu, quam pro ortu inveniendo opus ſit, nec rarum ſit hodie, inteſtina videre chyliferis refertiſſima, in quibus

bus adeo eorum reptatum obſervare facillimum eſt; attamen, ſi recte iudico, tum deſcriptione, tum delineatione, ſatis naturæ conſentaneis caremus: Nam primo, inter inteſtinorum chylifera & ſanguinea vaſa, reſpectu copiæ & diſpoſitionis, ingens diſcrimen invenio. Comparavi in hunc finem utriusque generis vaſa, poſtquam liquoribus convenientibus ea repleviſſem; & primo intuitu chylifera, ſanguineis inferiora numero eſſe deprehendi; dico primo intuitu: Nam tardare non oportet, quia quum citius diſpareant quam ſanguinea, facile hæc ipſique nervi, pro illis imponunt & pro chyliferis ab incauto pictore accipiuntur, quales errores non infrequenter committi ab eiusmodi hominibus ſibi relictis ſolent. Cavendum eſt deinde, quando vaſa iſta chylo adhuc diſtenta contemplari volumus, a motu, nec non ſpiritus ardentis affuſione, ille enim chylum in fugam vertit; hic vero tingit colore rubente, ſicut hocce phænomenon cum admiratione aliquoties obſervavimus. Quo pacto per ſimplicem ſpiritus ardentis ex frumento deſtillati affuſionem, absque admixtione, color albus in rubrum transmutetur, id equidem conceptu arduum eſt. Veroſimile eſt, quadam principii ſalino-ſulphurei, per poros vaſculorum penetrantis admixtione, hocce phænomenon generatum fuiſſe, eodemque forte modo in viventibus, principiorumve haud diſſimilium acceſſione & actione, ſanguificationis negotium inſtitui, quia ſicuti a ſuccorum alterantium permixtione albedo chyli in inteſtinis generatur; ita etiam converſionem chyli in ſanguinem, a ſimili cauſa licet ignota pendere, rationi conſonum videtur. Si a noſtro ſcopo minus alienum eſſet hic inqui-

Phænomenum curioſum.

rere, num inter alias cauſas, ab uſu ſpirituum ardentium, quorum in toto Imperio tanta eſt conſumtio, incolarum optimus habitus & cutis color florentiſſimus procedant, uti in hancce ſententiam propendemus, amplam ſane dicendi materiam haberemus, tum de hacce conſuetudine perantiqua, tum de aliis ſcitu dignis, quæ de Ruſſicæ Gentis victus ratione, ſanitate, morbis, remediis, partim Doctiſſ. Medicorum aliorumque hominum relationibus, partim experientia propria didicimus. Hæc vero in aliam occaſionem commodius reiiciuntur.

Duplex chylif. ordo in ſuperficie inteſtini. Tab. II. *Fig.* I. *Lit.* a.

Itaque, quod ad inceſſum chyliferorum ſpectat, quacunque parte inteſtini, ſive anteriore ſive poſteriore inveſtigatio inſtituatur, duplex chyliferorum ordo ſeu ramificatio in conſpectum venire ſolet, de qua tamen hactenus nemo quod ſciam, ſive iconem, ſive deſcriptionem communicavit. Tum ſede, tum forma a ſe invicem plurimum diſcrepant. Una, quæ profundior adeoque origini propior eſt, inter vaſculoſam & muſculoſam tunicam continetur, ideoque minus conſpicua eſt, & tantum per nebulam internoſci poteſt. Pone unamquamque valvulam conniventem, talis ramificatio arbuſculam referens, ad utrumque inteſtini latus, ſituque transverſali, ſeu quod idem eſt, cum fibris annularibus parallelo, locata eſt, hæque ramificationes ſibi tum in uno, quam in altero latere ſimillimæ ſunt, absque ſenſibili tamen communicatione. Per haſce vero ramificationes earumque truncum chylus recta via ad meſenterium tendit.

Lit. b.

Super hæcce chylifera, quædam alia deambulare vidimus ſub extima tunica, quæ inſtar vitri transparens eſt, quorum ea propter conſpectum obtinere facillimum

eſt

eſt. Hæc, quia a priorum forma & inceſſu plurimum diſcrepant, nervi potius quam ductus chyliferi eſſe videntur. Nam veluti filamenta in longum extenſa, ramificationes prius deſcriptas ad angulos modo rectos, modo obliquos ſecant atque propagine penitus carent; ex adverſo amplitudine illas ſuperant, hancque fere ab una extremitate ad alteram, ubique æqualem ſervant. *Tab.* II. *Fig.* I. *Lit.* b. Quamobrem hancce ſpeciem chyliferorum ad ſingularem finem comparatam eſſe minus dubitandum eſt. Id equidem ex eo ſatis clare apparet, quod per hoſce canaliculos incurvos, magis liberos, manifeſta inter ſubiacentia chylifera communicatio locum habeat, quibus adeo chylus via ampliore verſus meſenterium deferri poteſt. Deinde non inter propinquos ſolummodo, ſed etiam inter remotiores ductus, hancce communicationem obtinere eaque uniformi tendentia, ut a ramificationis unius principio ſeu radicibus verſus finem ſeu truncum alterius, qui in principio meſenterii eſt, hi protendantur, non minus perſpicue obſervavimus. Finem quod attinet, ad quem veritatis quadam ſpecie, deſcripta chyliferorum ſtructura referri poteſt, is eſſe videtur, ut, ſi quando propter varia obſtacula, chylus per intimiora vaſa, quibus ad meſenterium recta via devolvi aſſuetus eſt, minus progredi poteſt, ne retrorſum pelleretur, per altera vaſa abduci poſſit, quæ ideo ampliora ſunt & nulla diviſione gaudent. Propterea officii quadam ſimilitudine, emisſariorum nomine ſatis noto, non immerito appellari poſſunt. *Cur duplex chylif. ordo?*

Proximum nunc eſt, ut originibus & ſpeciebus chyliferorum, una cum eorum ſuper inteſtini parietes diſpoſitione perluſtratis, nonnulla circa rem ſatis obviam, ſed

ſed

Tam ant. quam poſt. inteſtini ſuperficiei vaſa chylifera propria.

ſed hactenus prætermiſſam, ſcilicet de chyliferorum egreſſu ex inteſtino, paucis expediamus. Quum facies inteſtini duplex ſit, anterior & poſterior ac in una totidem chyliferorum ramificationes exſtent, ac in altera, non immerito quæritur, num prope inteſtini finem, ubi meſenterium incipit, utriusque lateris chylifera in communem truncum confluant? an e contrario truncos diverſos & diſtinctos efforment. Facile error & lapſus committitur, ſi perfunctorie & ſine ea circumſpectione, qua ad hancce diſquiſitionem opus eſt, hoc negotium ſuſcipitur. Ideo factum eſt, ut ſine ullo fundamento a plerisque prior ſententia adoptata aut ſilentio prætermiſſa, nemini vero altera, quæ ſola vera eſt, quæque noſtris confirmata eſt obſervationibus, perſpecta. Igitur duplicem truncum chyliferorum prope finem inteſtini, unum anteriorem, alterum poſteriorem, demonſtrante oculo, luculenter conſpeximus. Nullum vero inter illos ſenſibile diſcrimen datur, niſi quoad locum egreſſus: ille enim ſuperiori. *a.* hic inferiori. *c.* inteſtini latere ad meſenterium tendit, hancque diſpoſitionem uterque in meſenterio retinet, uti in ſeqq. palam fiet. De cætero amplitudine quæ ſetam porci æquat nec non externa conformatione, perfecte conveniunt.

Tab. II. *Fig.* I. *Lit.* a. c.

Egreſſus chylif. per paria.

Per paria itaque, ex inteſtino verſus meſenterium, vaſa incedere chylifera, ex modo dictis manifeſtum eſt, quod non minus de vaſis ſanguiferis inteſtini verum eſſe deprehendimus. Attamen rariores ſunt chyliferorum quam ſanguineorum obſtructiones, cuius differentiæ ratio, tum a copia, tum a qualitate ſanguinis procedere poteſt. Interdum etiam ipſe chylus in ſuis vaſis ſiſtitur, uti

uti exemplo cuiusdam Senis conſtat " cuius inteſtina ,, præter belle conſpicua ac turgentia vaſa chylifera , ,, frequentiſſimos paſſim candicantes globulos , pannici ,, magnitudinem æquantes continebant, ex quorum ſingu- ,, lis ſingula chylifera vaſcula emergebant, qui eodem mo- ,, do turgebant atque ipſamet vaſcula. Verum talia exempla rariſſima ſunt : Nam ad liberiorem chyli per anguſtisſima & compreſſa vaſa tranſitum, duo oſtia cum duplici trunco conceſſa ſunt : Etſi una harum viarum deficit, per alteram adhuc, quamquam parcius, ſucci alibilis diſpenſatio fieri poteſt.

Inteſtina craſſa æq; ac tenuia chylif. gaudent.

Quibus inteſtinis conceſſa ſint chylifera , an omnibus promiſcue & qua proportione , an gracilibus duntaxat? id poſtremo expediendum eſt. De gracilibus nulla amplius lis eſt, uno excepto duodeno. Circa reliqua vero hoc notandum eſt , ea quidem chyliferis non deſtitui , ſed chylo tantum rariſſime diſtendi, ob quam cauſam inconſpicua ſunt eorumque exiſtentia in dubium revocatur. Id vero a duplici cauſa provenire putandum eſt : Quarum prima eſt, quod non ſatis iuſto poſt paſtum intervallo , tales homines occidantur & aperiantur ; vel enim diſtributio chyli peracta, vel incipiens eſt. An mirum in oculos non venire craſſorum inteſtinorum chylifera adeo diſſita , ad quæ ſerius & poſt ſatiata demum reliqua omnia deſcendit chylus : Porro ad aliud impedimentum , quod admodum ſenſibile nobis viſum eſt , hic attendendum eſt , ad differentiam ſcilicet inteſtinorum , item ad raritatem chyliferorum ſuper ea incedentium Quo enim magis verſus finem inteſtinorum accedis , eo chyliferorum numerus magis decreſcit, in-

Mm cre-

creſcit e contra craſſities inteſtinorum, quo fit ut vaſcula non eadem facilitate in craſſis internoſcantur quam in tenuibus quæ fere tranſparent. Ea propter tamen non ſtatim eorum exiſtentia in dubium revocanda eſt.

Inceſſus chylif. in meſenterio per paria.

Ad meſenterium, ceu vaſorum chyliferorum campum, ſeu quod idem eſt, ad chyli per cavitatem abdominis inceſſum, & quæ circa hunc forte minus perſpecta ſunt, ordo nos perducit. Prima obſervatio numerum chyliferorum in limine meſenterii incedentium, nec non locum hiſce proprium reſpicit, quarum quidem rerum cognitione hactenus deſtituti, neceſſe eſt ut circa chyliferorum & chyli motum, tendentiam, phænomenaque varia, multa falſa & incerta prolata exſtent. Quum ea ſit meſenterii humani ſtructura, ut duabus a ſe invicem diſtantibus membranis ſeu lamellis conſtet, ſepto craſſiore adipoſo interpoſito ita diſtinctis, ut veluti duplex loculamentum, unum ventrem, alterum dorſum ſpectans efformetur, jure meritoque Anatomico incumbit, ut quanam potiſſimum camera chylifera incluſa ſunt, an ſuperiore, an inferiore, an vero in utraque ſimul?ita oſtendat, ut demonſtrationis loco haberi poſſit, ſecus circa chyliferorum numerum maximopere hallucinabimur. Iam ſupra diximus, gemino trunco ex inteſtino prodire vaſa chylifera, uti detracto inteſtini extimo involucro, quod utriusque meſenterii lamellæ productio eſt, clare apparet. Ex eo ſequi videtur, duplicem in meſenterio ſeriem chyliferorum adeſſe, unam quidem ſupra ſeptum, alteram vero inferius infra ſeptum, id quod a nullo Anatomicorum hactenus indicatum eſt, cuius quidem cauſa eſt, quoniam nemo chyliferorum truncorum ex inteſtino egredientium duas ſeries

adhuc

adhuc vidit & determinavit, quamquam nexus meſenterii cum inteſtino idem edocere videatur, quemadmodum experimenta anatomica plus quam una vice inſtituta, id extra omnem dubitationis aleam ponunt. Sic connexum eſt meſenterium inteſtino, ut huius medietati ſeptum adipoſum, quod duabus meſenterii lamellis interpoſitum eſt, firmiter alligatum hacque ratione inteſtinum in duas partes æquales quaſi diviſum ſit, reflexis ſupra infraque prædictis meſenterii lamellis, quæ inteſtinum involvendo, in parte meſenterio oppoſita denuo coniuncta, tunicam extimam efficiunt. Ex eo perſpicuum eſt, ea chylifera, quæ e parte inteſtini anteriore prodeunt, commercium nullum cum poſterioribus habere, neque horum coniunctionem cum illis ob craſſitiem ſepti, poſſibilem aut facilem eſſe, neque etiam opus eſſe ad ſui exitum, ut tunicam extimam inteſtini pertundant, uti conſideranti patet.

Facies chylif. in meſenterio Tab. 11. *Fig.* 1. *Lit.*ddd.

Poſtquam ſpecie tubuli capillaris, vix ſetæ porcinæ mediocris craſſitiem æquantis, ad confinia meſenterii uterque truncus pari paſſu ambulans pervenit, peracto duarum fere linearum itinere, faciem ſuam ſubito permutat. Nam momento truncus talis exilis in duos tres quatuorve ſurculos, vix trunco minores ſcinditur, qui integrum manipulum tubulorum capillarium conſtituunt. Eorum nonnulli mox coeuntes, inſulas oblongas efformant; alii ſeparatim incedunt, obviamque factis aliis propaginibus inoſculantur, mox novus iterum tubulus exſurgit, qui poſtremo cum plurimis aliis ex toto inteſtinorum ambitu concurrentibus ſic confunditur, ut eum internoſcere ac diſcernere amplius impoſſibile ſit. Cæterum a vaſis ſanguineis, quæ pinguedine obtecta

ſunt, chylifera ſatis diſtare obſervavimus: Inter ambo enim, tota meſenterii pinguedo ſic interiecta eſt, ut ad contactum pervenire non poſſint, quod multo magis de ſuperiore & inferiore chyliferorum ſerie intelligendum eſt, quoniam adhuc magis a ſe invicem diſtant, ſiquidem immediate ſub meſenterii lamella in pinguedinis ſuperficie locata ſunt. Attamen communicatio omnis inter chylifera primæ & ſecundæ ſpeciei, eapropter non deneganda eſt, nam ſemel propaginem vidimus, e facie meſenterii ſuperiore verſus inferiorem, perſepti ſubſtantiam contendentem & glandulæ corpus ſubeuntem, quæ adeo pro communicatione, non tamen immediata haberi poteſt.

Confluxus chyliferor. Lit. e. Talis chyliferorum inceſſus eſt toto illo ſpatio, quod eſt inter inteſtina & aream illam quæ ad univerſi ductuum chyliferorum ſyſtematis congregationem deſtinata eſt. Singuli enim trunci, e tota inteſtinorum circumferentia huc convolantes, quando ad aream iſtam plurimis glandulis conſitam & admodum concentratam perveniunt, ad tantam, ut ita loquar, confuſionem ac implicationem rediguntur, quæ non ſolum intuentium oculos mirum in modum afficit, ſed quoque ſingularem in ſe continere uſum ſignificat.

Uſus. Quamobrem, ut uſum paullisper attingamus, non hunc ſolummodo contextum admirabilem omnium undique ad angulos acutos confluentium vaſculorum perpendere oportet, ſed hoc etiam conſiderationem meretur, quod eadem diſpoſitio in utraque meſenterii facie oculis ſe ſiſtat. Nam quia bis occurrit, neceſſe eſt, ut magnæ utilitatis tranſitusque adeo chyli per hoſce meandros indiſpenſabilis ſit neceſſitatis, alias, ſi una infu-

ſio-



Canalis thoracicus ex Elephanto quadri parte
ex Phoca
ex Catopardo
Fig I.

ſionis chyli ratio eſſet, minime iſtis ambagibus opus fuisſet. Itaque ſuppono chylum qui ex inteſtinis ſucceſſive vaſa chylifera ingreditur homogeneum ſeu ſimilem ſibi non eſſe adeoque in vasculis illis maximam chyli differentiam dari, quia dum chylus in inteſtinis elaboratur, aliæ & aliæ particulæ variæ indolis extricantur, quæ emancipatæ avolant, vaſisque chyliferis ſucceſſive transportantur; Et hoc quidem eousque non malum aut damnoſum eſſe videtur, quamdiu ſcilicet vaſis adhuc vehitur chyliferis; Sed ſi chylus ſub tot contrariis formis maſſæ ſanguineæ ingeritur, tum ita tutum non amplius eſt, quoniam duplex inde malum ſubſequi poteſt, vel enim particulæ diviſim ſanguini immixtæ nimis diſſociantur ac divelluntur adeo, præter naturæ conſilium, ut vel nunquam vel tardiſſime in nexum convenientem pervenire queant, vel particulæ ſic diſſociatæ, tumultus & perturbationes excitant, quas ſervato vinculo minus ſuſcitare valuiſſent. Quamobrem, ut me expediam, ſitus, numerus, contextus chyliferorum, verbo, ſingula quæ in præfata diſpoſitione occurrunt, nihil aliud quam prudentem exactamque commixtionem ſignificare videntur: contrariis enim motuum directionibus crebrisque anaſtomoſibus hic occurrentibus neceſſe eſt, ut chyli particulæ millies locum mutent, ſuique generis particulis obviam veniant, iisque maritentur, ac probe inter ſe miſceantur, antequam libertatem obtineant effugiendi verſus loca deſtinata, hoc eſt, receptaculum & ductum *Pecqueti*.

Quamquam verſus receptaculum & ductum *Pecqueti* omnem chylum contendere verum ac indubium ſit, mo-

Progreſſus chylifer. verſus receptac. dus tamen incedendi chyliferorum in homine fere ignotus aut perperam deſcriptus eſt. Præter generales difficultates,quæ ordinarie in horum ductuum adminiſtratione obſtant, novum impedimentum hic ſuggeritur a partium ſuperincumbentium moleſto ſitu, & facilitate læſionis, quæ ob incredibilem implexum ſimulque profundam immerſionem raritatemque vaſculorum chylum vehentium, uti evitari, ita reparari vix poteſt. Hiſce non obſtantibus, optatum tamen ſucceſſum in hacce difficili adminiſtratione obtinuiſſe nobis viſi ſumus. Præter uſum nobilem, quem præſtare diximus laudatum chyliferorum concurſum alius non prætermittendus eſt, ſcilicet reductio chyliferorum ad minorem numerum; nam chylum per tot diſtinctos & disiunctos canaliculos in maſſam ſanguineam difficulter ingredi poſſe, ipſa ratio & ceterorum vaſorum leges perſuadent. Igitur numerum chyliferorum imminui & reduci, eorum contra amplitudinem augeri omnino concedendum eſt. Miſſis, quæ ſuper hoc numero, a variis proſectoribus divulgata ſunt, ea, prout nobis oblata ſunt, paucis deſcribam. Uti chyliferorum numerus ad unitatem ſe reduci non patitur, ita numerum quinarium ea excedere nunquam obſervare potui:

Eorum reductio ad numerum quinarium.

Tab. 12. *Fig.* 1. N. 1. 2. 3. 4. 5.

Quamquam luſum in hiſce vaſis fieri concedam, quinque perpetuo vaſa in cadaveribus ad hunc finem inciſis, verſus receptaculum contendentia clare & diſtincte numeravi: Sed cavendum eſt a lymphæ ductibus, ne hos cum illis confundamus & ſic chyliferorum numerum temere augeamus. Quod eorum magnitudinem attinet, excepto uno quod capacius eſt, æqualem inter ſe proportionem obtinent, adeoque a vaſis, quæ vocantur primi generis

neris, vix differunt. Denique, quanam in abdomine via ad memoratum receptaculum incedant, probe aſſecutus ſum. Nam, poſtquam remotis removendis, ad pancreas perventum eſt, ibi ad dextram eius extremitatem cui incumbit oblique & ligamentis tendineis annexum eſt principium ieiuni, vaſa noſtra ex meſenterii finibus egredi & apparere incipiunt. Vnum, quod patentius eſt, 5. ſub poſteriore & inferiore pancreatis facie ſiniſtrorſum verſus incedit, mox venam renalem ſiniſtram adſitasque lumbares glandulas tranſcendens in proximum receptaculum, eiusque anticam partem terminatur. Reliqua, in antica magis pancreatis facie conſpicua ſunt, eique veluti fundamento incumbunt: Oblique enim inter duas extremitates pancreatis aſcendunt, hinc per partem poſteriorem rurſus pari numero deſcendunt, diſtinctisque canalibus, ad exortum arteriæ meſentericæ ſuperioris, non quidem in medio receptaculi, ſed in eius apice ſeu principio ductus thoracici inſeruntur. Quidam veterum, memoratum inceſſum ſuper corpus pancreatis in canibus obſervantes, ea pancreati ſingularem uſum præſtare ſunt imaginati; Verum potius pancreas illis inſervire dicendum eſſe videtur: Nam, quia pancreas ſepto transverſo & ſtomacho propius adſtat, neceſſe eſt, ut chylifera vim & preſſionem utriusque ſentiant, ſicque motus chyli adiuvetur Deinde a violentis inteſtinorum diſtractionibus eo tutiora ſunt, quo pancreatis firmiore baſi gaudent.

Tranſitus chylif. ſuper pancreatis dorſum.

Hactenus de univerſo ſyſtemate chyliferorum, tanquam re adhuc nova & ardua, cui anatomicus metu infau-

fauſti eventus manum admovere detrectat, ne eius fama inde periclitetur. Minus ardua res eſt chyli receptaculum & thoracicum ductum inveſtigare: Nam hodie a quovis ſolerti anatomico id poſtulatur, ut in ſingulis cadaveribus tam hominum quam brutorum quæ ſua parvitate ſe non excludunt, ea perpetuo ante oculos ſiſtere & demonſtrare valeat. Varia in hunc finem a viris exercitatiſſimis excogitata & divulgata ſunt artificia, quæ hic nolo repetere; ea tantum quæ in theatro noſtro in uſu ſunt, communicabo.

Requiſita pro demonſtratione receptac. & ductus Pecqueti.

In omnibus diſſectionibus qua publicis qua privatis ad id ſemper reſpiciendum eſt, ut quæ invicem naturaliter cohærent, ea ſi fieri poteſt, quam minime disiuncta, ſeu per fragmenta demonſtrentur: Pulchrum enim eſt ac utile, partes videre integras, quoad univerſam ſtructuram quæ ad ipſas pertinet, absque mutilatione, cum omnibus adminiſtrantibus & ad functionem neceſſariis particulis, uti in vivente corpore id ſeſe habet. Ex hacce regula ſequitur, duplici tantum ratione ſeu methodo vere anatomica poſſe tradi ſeu demonſtrari partes, de quibus præcipue hic ſermo eſt, altera cum tota chyliferorum congerie ac proinde cum univerſo ſyſtemate vaſorum chylum vehentium, uti modo fecimus & tradidimus; altera cum ſyſtemate vaſorum lymphaticorum inferioris & medii ventris, uti nunc ſumus expoſituri.

Nova methodus proponitur.

Incipiendum eſt in alterutro inguine, quoniam electio arbitrio proſectoris relinquitur. Hinc ſi in uno difficilius ſuccedit experimentum, in altero tentare idem proclive eſt. Arbitrio quoque proſectoris relinqui-

quitur, an velit ante iniectionem ventrem cadaveris prius aperire nec ne, quia ad ſucceſſum experimenti id indifferens eſt. Si denique in utroque inguine ob pinguedinis copiam vel aliud impedimentum irritum fiat experimentum, aperiendum erit abdomen, & detracto peritonæo ad alterutrum latus pelvis vaſa quæſita momento adſunt. Quando propter effluxum lymphæ inconſpicua ſunt, hocce ſigno internoſcere licet nempe albeſcentis & plani filamenti umbra ſuper venas crurales aut iliacas oblique incedentis, quas ea propter Soli aut lumini obvertere non inutile erit. Quod reſtat, una iniectione abſolvitur. Si in utroque latere iniectio facta ſit, omnium lymphæ ductuum ex femoribus *aa.* ex cavo pelvis *bb.* ex peritonæo *cc.* viſceribusque totius abdominis prodeuntium inceſſum, ſocietatem cum vaſis ſanguineis, tranſitum per varias glandulas, crebras anaſtomoſes & inde formata retia, plexus & truncos, ipſamque ciſternam & continuatum ductum thoracicum uno conſpectu obſervare licet, uti inferius explicabimus. Beneficio huius methodi univerſalis incidi in rem admodum curioſam, quæ forte ob defectum ſolum prædictæ methodi rarius offerri ſolet: Pauca enim pluralitatis receptaculorum ductuumque thoracicorum tam in brutis quam hominibus exempla proſtant. Vid. *Pecquetus*, *Bartholinus*, *Blancardus*, *Kerkringius* qui triplicem vidit, *Louverus*, *Sylvius*, *Bourdonus*, *Tauvrius*, *Eduardus Vium* in Ephemerid. nat. Curios. *Muraltus* in exper. anat. *Saltzmannus.* *

Tab. 12. *Fig.* 1.

Nn Bis

* *Excerptum Epiſtolæ a Celeberrimo* Io. Saltzmanno *d.* 4. *Iunii* 1727. *ad nos datæ. En habes ea quæ ſu-*

Duplex receptac. cum duplici canali thoracico, in viro & fœmina

Bis primo in virili, ex quo figura deſumta eſt, & deinceps in fœminino ſubiecto, duplex receptaculum cum duplici canali thoracico perſpicue obſervavimus & præſentibus *Illuſtriſſimis Blumentroſtiis* aliisque demonſtravimus. Vaſa utriusque lateris lymphatica *aaaa.* non uti moris eſt in unum alveum confluebant, ſed duplex erat ampulla dextra & ſiniſtra, in quas ſeparatim terminabantur. Nullam inter eas ſive in figura ſive in longitudine

---

periore anno de ipſis hiſce viis in homine obſervavi, ut taceam multa alia præcedentibus detecta temporibus. Vidi nempe, multisque Medicinæ Doctoribus & Cultoribus, quibus eum intueri volupe erat, demonſtravi ductum thoracicum prorſus extraordinarium, receptaculum erat duplex, alterum a latere corporis 2^dae^ *lumborum vertebræ ſatis amplum & oblongum referebat ſacculum, qui mox anguſtior redditus ſub arteriæ aortæ trunco eo in loco, ubi emulgens utrinque ab eo abſcedit, aſcendebat ſuper medium eiusdem vertebræ corpus, dein iterum dilatatus in ſaccum oblongum & capacem ordinarium receptaculum conſtituentem abibat. Ex hoc 4 canales, duo maiores & totidem minores emergebant ultimæ dorſi vertebræ incumbentes. Præterea duplex etiam inſertio in utramque venam ſubclaviam conſpiciebatur, ductu in duos ramos diviſo eosque inſignes & non uti alias fieri ſolet, rurſus coeuntes inſulamque veluti efformantes, dexter longior erat ſiniſtro & arteriam ſubclaviam illius lateris ſupergreſſus anfractu tortuoſo literam S maiusculam ſatis accurate referebat. Siniſter plures pariter anfractus deſcribens venæ ſubclaviæ eius lateris in loco*

dine differentiam ſenſibilem deprehendimus, præter hoc unum, quod ſiniſtra A. tumidior, amplior & quoad ſitum eminentior dextra B. erat, quæ profundius verſus pelvim inclinabatur quartæ fere vertebræ lumbari inſiſtens. Hæcce inæqualitas in cauſa eſt, quod ductus thoracicus dexter ad eum gradum altitudinis quo ſiniſter haud aſſurgat, quoniam ſcilicet verſus infe- *Tab.* 12. Fig 3. *Lit*. A. B.

Nn 2 rio-

ordinario inſerebatur, nempe parti ſuperiori prope inſertionis venæ iugularis internæ locum. Quæ uti & plura alia ☿io vivo repleta iucundiſſimo ſpectaculo ſeſe exhibebant. Idem ☿ius in infinita etiam vaſcula lymphatica tum in hoc tum in aliis ſubiectis penetraverat, nimirum quæ a glandulis dorſalibus, oeſophagi, iugularibus pullulant, item myriades a confiniis thymi, a medulla ſpinali per ſpecum oſſeam vertebrarum prodeuntes, plures in utroque latere aortæ nec non ex aqualiculo ad latus arteriæ iliacæ ſiniſtræ aſcendentes verſus receptaculum. Quod vero hiſce omnibus anteferendum eſſe iudico viſum repertum, eſt quod d. 20. *Febr. huius anni in vaſa lactea primi generis prope inteſtinum ieiunum inquiſiverim & poſt diuturnum laborem omni adhibita diligentia, & qua in eiusmodi labore opus utique eſt patientia, unum tandem detexi inſigne, in quod ☿ius immiſſus in pleraque vaſa lactea per meſenterium diſperſa penetravit tum primi tum ſecundi generis, quorum plurima in faſciculos & glomeres velut collecta, curioſorum oculis ſe ſiſtebant Quæ mihi ſpem faciunt fore, ut integrum vaſorum & lacteorum & lymphaticorum ſyſtema ☿io repletum in abdomine exhibere & demonſtrare mihi aliquando liceat.*

riorem extremitatem longior eſt, viceverſa quoniam extremitas inferior ſiniſtri brevior eſt, ſuperioris econtra longitudo maior eſſe debet, ut veluti menſuræ inter utrumque & æqualitatis ratio ſervaretur.

Reliqua ſive receptaculorum ſive ductuum thoracicorum conformationem & communicationem ſpectantia, non minus curioſa & attentione digna erant. Etſi enim per transverſas & laterales anaſtomoſes *bb.* ambo receptacula communicare videantur, communicatio tamen talis eſt, ut non indiſcriminatim ex uno in alterum, ſed ex dextro ſolummodo in ſiniſtrum circuitus liquorum locum habeat. Per diverticula *cc.* deinde utrinque forma arcuum receptaculo appenſa, quandam diverſionem qua pars liquoris a tranſitu per totum cavum veſiculæ diſpenſatur, fieri manifeſtum eſt, quod pariter de tribus parallelis ductibus *ddd.* ex ſummo veſiculæ dextræ una cum ductu thoracico, ad certam altitudinem aſcendentibus intelligi debet: Propterea tota liquoris quantitas non recta ſeu immediate e receptaculo in ductum thoracicum exſilire poteſt, ſed pars eius aliquanto ſpatio per memoratos particulares ductus elevatur, antequam ad ductum principalem perveniat.

Fig. 3. *Lit.* C. D. Quod ductus attinet thoracicos, ſicuti duo receptacula ad utrumque vertebrarum latus ſibi parallela, ita etiam duo canales unus D. a dextris ſub vena cava, alter C. a ſiniſtris ſub aorta per totam ſpinæ longitudinem decurrentes in conſpectum veniebant, quorum etiam in conformatione & inceſſu obſervata diverſitas, non ſine diverſi uſus ratione comparata nobis viſa eſt: Nam præter altitudinis, quæ infini-

ſiniſtro ut ſupra indicavimus maior erat quam in dextro differentiam, id diſcriminis quoque evidentiſſime adparebat , quod in dextro ea fere rectitudo eſſet quam in fiſtula barometri obſervare ſolemus. Ad ſecundam dorſalem vertebram demum inſignem efficiebat angulum ſeu flexuram nec non bifurcationem ſeu inſulam , ex qua nova propago verſus ſiniſtrum canalem ſeſe inclinans ſimulque cum duobus aliis ramis ex ſiniſtro prodeuntibus ad venam ſubclaviam ſiniſtram contendens , abſcedebat. Dexter ſiniſtro craſſior & amplior erat : Siniſter econtrario admodum ſinuoſa & flexuoſa via cum crebris & prolixis bifurcationibus * * * * duplicem fere ductum thoracicum mentientibus totoque eius tractu conſpicuis incedebat. Priusquam ſententiam noſtram de hac conformationis diverſitate ſimulque pluralitate receptaculorum & ductuum generaliter exponamus, indicare modum oportet , quo ad exemplum receptaculorum duo thoracici canales in noſtro ſubiecto inter ſe invicem communicabant. Tribus locis,prope ortum,& in medio per brachia ſeu tubulos transverſos *e* nec non per memoratam propaginem F e dextri canalis fine productam eam inſtitui communicationem, qualis ſupra inter duo receptacula deſcripta eſt , luculenter conſpeximus. Inter plurima vaſa lymphatica ſimul in conſpectum venientia , unum monſtruoſe diſtentum ſub clavicula ſiniſtra locatum occurrebat, quod una cum cæteris eo fine repræſentari curavimus, ut quantam lymphæ ductus absque ruptura diſtractionem pati poſſint,uno hoc exemplo intelligi poſſit. Ex eo tamen formationem tumorum veſiculoſorum , cuiusmodi

Fig. 3. *Lit.* E. *Lit.* F. *Lit.* G.

articulo obſervationum anatomicarum exemplum exſtat, nondum explicari poſſe cenſemus.

Poſtremo, ut hiſtoriæ finem imponamus, in iis ſubiectis in quibus pluralitas tum receptaculorum tum canalium thoracicorum, ad ſimilitudinem deſcripti caſus occurrit, determinandum eſt quis duorum proprie chyliferus ſit? Nam improbabile videtur utroque ſimul chylum ſurſum devehi. Quare, ſi nullum aliud ſignum, quo differentia hæc internoſci queat occurrit, ſuſpicari licet (modo conformatio diſpar ſit) illum proprie pro chylifero habendum eſſe, cuius ſive ſitus ſive conformatio cum cognita ſtructura & ſitu ordinario maxime convenit, quia nulla ratio eſt ut in duobus canalibus eundem liquorem tranantibus diverſa inſit conformatio.
Fig. 3. Propterea in noſtro ſubiecto non immerito pro chylifero ſiniſtrum C. agnoſcimus, per quem chylus ſicuti per alterum canalem D. lympha, devolvitur.

Cæterum per exempla citata incertum dubiumque fieri videtur, quisnam genuinus & naturæ magis conſentaneus numerus harum viarum ſit? quia infiniti caſus dari poſſunt, in quibus duplici receptaculo ductuque thoracico carere periculoſum videtur; Et quia recens & in paucis hominibus tentata fuit hæc encheireſis anatomica (ad minimum qua nos proponimus methodo) ſuſpicari licet, an defectu methodi & diligentiæ potius quam naturali defectu viæ de quibus ſermo nunc eſt, duplices rarius inventæ ſunt. Quam ob rem ſuademus, ut vel in utroque inguine, vel ad utrumque latus aqualiculi uti ſupra dictum eſt, hæcce diſquiſitio ſæpe inſtituatur.

Nunc

Nunc tempus eſt ut ea, quæ ſecundante laudata methodo tum circa receptaculum tum canalem thoracicum ſpecie quadam novitatis nobis innotuere, ſolo veritatis ſtudio exponamus. De differentia inter marem & fœminam prout in utroque ſexu hæ viæ nobis oblatæ ſunt, etſi ab aliis prætermiſſa, verba primum facienda ſunt. Eandem vero quam in cæteris partibus duorum ſexuum, differentiam proportionemque obſervavimus: In fœminis enim contractiores & exiliores ſunt pro maiori parte quam in viris, etſi huius inæqualitatis cauſam ignoremus. Cogitare licet in fœminis, propter evacuationes ſolennes quibus obnoxiæ ſunt neceſſitatemque alendi fœtus, minorem lymphæ copiam ex partibus inferioribus refluere, eamque ob cauſam tanta ductus amplitudine opus non eſſe quam in viris diverſa temperie gaudentibus. Cæterum in individuis, ſalva illa generali in ſexu differentia, eam conſtantiam & varietatem quæ a ſolertibus alias anatomicis obiicitur iconibusque eorum repræſentatur, invenire non potuimus: Noſtra enim methodo quæ abſque flatu & liquoribus ſpiſſis, abſque expanſione perficitur, ea uniformitas ſemper apparuit, quæ communiter in organis nutritioni dicatis, in quibus variationes raro contingunt, obſervari ſolet. Loquor de variationibus vere talibus, quæ ſtructuram & faciem peregrinam conciliant: Nam quoad variationes minoris momenti, uti ſunt craſſities, amplitudo, inclinatio maior vel minor &c. tales utique dari concedendum eſt. *Differentia reſpectu ſexus.*

De Receptaculo *Pecqueti* eiusque vera conformatione per anatomen detecta nunc dicendum eſt, quæ ſi cum anatomicorum deſcriptionibus & delineationibus minus *Tab. 12. Fig. 1. Lit. A.*

nus

nus concordant, ſoli naturæ & difficultati præparationis tribuendum eſt. Poſtquam tum pinguedinis tum ſuccingentis membranæ velamenta, præmiſſa iniectione, remota ſunt, ea receptaculi configuratio apparet, qualis a nemine adhuc obſervata & delineata fuit, quæ idcirco non niſi adhibita ſingulari attentione ac circumſpectione videri & cognoſci poteſt. Non melius quam cum ſeminis maſculini receptaculis comparari illud poteſt, ſi tantum multitudinem inteſtinulorum demas. Plurium enim inteſtinulorum transparentium per fibrillas colligatorum partim anfractuoſorum partim perpendicularium atque inter ſe communicantium aggregatum eſt, in quo proinde contenta fluida in quendam circuitum agi videntur: Namque primo baſis ſeu fundum A. inteſtinulo circulum efformanti ſimile eſt, cuius duæ extremitates *dd.* ſuperius in tertiam quandam cavitatem *e.* dehiſcunt: Cæterum toto ambitu hocce inteſtinulum clauſum adeoque cœcum eſt. Eiusdem dextro lateri inteſtinulum aliud *f.* connaſcitur, quod mox iterum receptum parvam inſulam producit. Conſpectus prædictarum extremitatum inſigni vaſe chylifero 5. quod anteiacet, impeditus eſt. Illud enim ſiniſtrorſum veniens, poſtquam ad receptaculi confinia pervenit, verſus latus eius dextrum oblique contendens eo quem diximus loco ad angulum acutum implantatur chylumque in huncce gyrum evomit: Hoc pacto neceſſe eſt, ut chylus cui hicce gyrus deſtinatus eſt, e dextra in ſiniſtram partem devolutus circuitum inſtituat.

Similitudo receptac. cum veſiculis ſeminal.

Parte poſtica eiusdem gyri, aliud capacius inteſtinulum *g.* annexum eſt, quod particularem cavitatem conſtituere videtur. Ut huius formatio ſeu connexio uſusque rite expo-

ponantur, ab ima pelvi originem repetere neceſſum eſt. Utrinque remota peritonæi lamella, ex femoribus, ex tota pelvi contentisque in hac viſceribus, numeroſi lymphæ ductus *abc*. qui ſuper vaſa iliaca oblique ad latus eorum externum tranſeunt, ſurſum progredi obſervantur, quorum dextri ad venarum, ſiniſtri ad arteriarum iliacarum concurſum, iuxta venæ cavæ & aortæ truncos glandulasque iliacas *hhhh*. exſtant; Quando eousque pervenerunt, ut propter multam pinguedinem qua memoratæ glandulæ obſitæ ſunt ab ulteriore quaſi tranſitu prohibeantur, tum nexus & retia efformant quorum pulchritudinem non parum augent diverſa hiſce immixta lymphatica rarioris ſpeciei, uti ſunt peritonæi *cc*. & medullæ ſpinalis, quæ a nonnullis pro vaſis lacteis ſeu chyliferis perperam accipiuntur. Huic plexui deinde ſuccedunt duo vel tria vaſcula grandiora *ii*. pinguedine libera, tum lateri tum dorſo venæ cavæ & aortæ accumbentia mox facto exiguo progreſſu viſui ſeſe proripientia, quoniam reliquam viam usque ad partem receptaculi poſticam ſub vena & ſub arteria abſolvunt quas ideo prius removere neceſſe eſt, ut tum inceſſus tum inſertio quam utriusque lateris lymphatica dextrorſum & ſiniſtrorſum diſtincto caudice in receptaculi poſteriorem partem, de qua ſupra, inſtituunt, in conſpectum venire queant. Hæc pars poſtica receptaculi g. cum anteriore A. quam chylo dicatam eſſe diximus, nulla parte communicat. *Tab*. 12. *Fig*. 1.

Ex eo perſpicuum fieri videtur, pro utraque fluidorum ſpecie conceptacula propria condita eſſe, unum in chyli gratiam quod anterius eſt & ventrem reſpicit, alterum huic ſubiacens capacius & dorſum reſpiciens in lymphæ gratiam adeoque *Aliud chyli, aliud lymphæ receptac.*

que ambo fluida invicem non commiſceri uti hoc fieret,ſi in unum alveum effunderentur uti hactenus viſum eſt. Ex una autem contemplatione decurſus & tendentiæ utriusq; fluidi ſimulque ductuum advehentium præfatæ diſpoſitionis cauſam intelligere facillimum eſt: Nam quia in homine chylus ſuperne deſcendit, lympha e contra aſcendit, talis motuum contrarietas duplicis conceptaculi neceſſitatem omnino indicare videtur, ne ſcilicet alter alteri impedimento eſſet vel etiam, ne confluentium ſimul masſarum onere ciſterna nimium gravaretur aut laceraretur.

Neceſſitas duplicis receptac.

Quod denique receptaculi finem attinet, animadvertendum eſt vice appendicis duos ei canales perpendiculares *kk.* anteriori poſteriorique receptaculo reſpondentes, in quibus proinde adhuc inpermixta ac diviſa fluida devolvi videntur continuatos eſſe, qui poſtremo aliquot linearum progreſſione facta usque ad arteriarum cœliacæ & meſentericæ ſuperioris glandularumque lumbarium confinia elevantur unumque in truncum confluunt, quem tum ſitus tum aliorum indiciorum teſtimonio pro fine receptaculi non immerito reputamus, cuius proinde tota longitudo 19 linearum eſt. Cum duobus prædictis canalibus non confundendus eſt tertius hiſce parallelus vasque inſigne lymphaticum quod ad receptaculi corpus non pertinet, verum e ſiniſtri renis regione ſumto principio ibidem quo duorum prædictorum canalium confluxum eſſe diximus, terminatur. Cæterum, ut nihil intactum relinquamus, unam circa glandulas receptaculo adſitas *mm.* quæ toties errandi anſam præbuere, animadverſionem ſubiungere non inutile viſum eſt: Primo conſpectu inter glandu-

Glandulæ lumbares.

las

las lumbares ipſumque receptaculum nulla diſtinctio apparet, quia propter circumfuſam pinguedinem unum veluti corpus continuum efformare, quam ſuſpicionem augent ſuperambulantia vaſa chylifera quæ ad glandulas æque ac receptaculum pertinere creduntur: Ex quo factum eſt, ut ſingularem inter glandulas & receptaculum familiaritatem in chyli gratiam inſtitutam eſſe multis perſuaſum ſit. Verum enimvero ſi ulla in parte certe in locis hiſce inacceſſis cunctatione opus eſt; Equidem in glandularum ad receptaculum poſitu tum vero inceſſu chyliferorum ſuper glandulas, quid opus eſt myſterium quærere? ab una namque ſitus partium ac diſpoſitionis abdominis ratione potius quam neceſſitudine aut familiaritate pendere hancce chyliferorum & lumbarium glandularum viciniam unicuique conſideranti patet.

Vena alba *Euſtachii* quæ immediatæ ſucci alibilis diſpenſatricis ſeu ultimæ portæ ad ſanguinem ductusque thoracici ſeu chyliferi nomine hodie nota eſt, etſi novarum acceſſionum minus indiga ſit, eam tamen ſilentio præterire noſtri inſtituti ratio minus patitur. Idcirco eius quæ ſupra inter receptaculum chyli & ſeminis virilis receptacula inſtituta eſt comparationis memores, prædictam venam albam *Euſtachii* cum paraſtata variis locis diſtracta & evoluta variisque hinc inde ſpiris & circumvolutionibus lateralibus conſtante, non male convenire deprehendimus: Propterea omnium gyrorum & anfractuum ratione habita, hancce venam (ad minimum hominis longitudinem) quæ alias in ſuo ſitu & connexione naturali thoracis longitudinem adeoque 14. pollices vix excedit, æquare neceſſe

Tab. 12. *Fig.* 1. *Lit.* B.B. B. B.

Similitudo canalis thorac. cum paraſtata eiusque longitudo.

 eſt.

Differentia in aliis animalibus.

eſt. Talis vero in aliis animantibus noſtra manu diſſectis e. gr. in phoca, in catopardo *Americanorum*, in elephanto diſpoſitio nobis haud oblata eſt ; Cuius discriminis ratio in eo forte conſiſtit, quod in hiſce animantibus voracioribus motus chyli raro intermittit, propterea in ductu thoracico ſemper pleno tales circumvolutiones ſeu anfractus minus neceſſarii ſunt quam in homine, in quo chylus ſtatis temporibus ac minori copia diſtributus minus præcipitanter per huncce canalem devolvitur. Deinde, quum in homine maior quam in animantibus ratione deſtitutis perfectio ſeu concoctio chyli requiri videatur, ideo fortaſſe ſingularis illa fabrica comparata eſt, ut chyli particulæ melius ſeſe expandere certumque caloris gradum in hiſce mæandris acquirere valeant priusquam ſanguini ingerantur. Denique in illis caſibus ubi chylus vel lympha exitum facilem e ductu thoracico invenire minus poteſt tales anfractus utiliſſimi ſunt, quia ſurſum nitentibus & in aſcenſu perpendiculari impeditis humoribus locum cedunt donec illud obſtaculum ſublatum ſit. Si id cito non tollitur, tum ſane periculoſum eſt : Nam ut de totali fluxus abolitione quæ metui poteſt nihil dicam, duo funeſti ſtatus inde enascuntur 1. imminutio ſucci alibilis & roris in ſanguine neceſſarii, cuius ſane defectu ſanitatis & virium labefactatio æque certo quam illius affluxu earum conſervatio producitur 2. eorundem ſuccorum in partibus variis ſtagnatio contra naturæ conſilium, unde deſtillationes & congeſtiones hydropicæ, quæ minus ab hepatis aliorumque viſcerum labe quam a prædicto canalis thoracici aliquali infarctu etſi ignoto proxime generantur.

Tri-

Tribus tantum locis præmemorati in vena *Euſtachii* anfractus ſeu plexus in conſpectum veniunt, reliqua canalis parte ſimplicis ductus parum flexuoſi ſpeciem referente, cuius integram & naturalem diſpoſitionem accurate delineatam hic ſiſtimus. Præter generalem gyrorum compagem quædam alia in eodem contextu non minus curioſa & ſcitu digna quæ propterea minus prætermittenda ſunt, viſui ſe offerunt. Vertebris non ita annexus eſt canalis thoracicus uti vulgo traditur: Nam plures ex ſingulis gyris ſecedentes propagines ſub illo ita reflectuntur, ut a dextro latere ad ſiniſtrum progrediantur indeque rurſus ſuper eundem via retrograda ad dextrum latus incedant, quibus proinde tam ſuperius quam inferius circumvolutus canalis pyramidis armillarumque laxe cingentium ſpeciem exhibet: Ex quo perſpicuum eſt tum a prædictis orbibus tum vaſis ſanguineis ſubtenſis & pinguedine ſubſtrata ſuſpenſum teneri canalem thoracicum, ne contactu ſpinæ humorum præterlabentium curſus immoraretur. Ulterius res animadverſione digniſſima circa memoratos plexus nobis oblata eſt, qua nova ratio aſcenſus humorum per ductum thoracicum hactenus ignota luculenter demonſtratur: Inter inferiorem medium & ſummum plexum qui minimus eſt, ea communicatio intercedit qua aditus ex uno in alterum ita patet, ut a trunci principalis ductusque ingreſſu fluida diſpenſari hisque gyris abſorberi queant: Hanc vero communicationem per quasdam propagines ſeu rivulos ab uno faſciculo ad alterum usque protenſos inſtitui, evidentiſſime conſpeximus: Quamobrem ex tali dis-

Tab. 12. *Fig.* 1. *L.* CCC.

li diſpoſitione minus dubitandum eſt comparat im hanc eſſe, ut quædam humorum præterfluentium diviſio in ea contingeret ea quidem lege, ut minor pars per ductum ſeu truncum principalem, maior vero ad latera per memoratos anfractus curſum ſuum abſolvat, donec ad ſuperiorem partem canalis perventum ſit.

Cæterum ſatis perſpicuum eſt in homine chylum non perpendiculariter aſcendere uti hactenus traditum eſt, neque talem aſcenſum cum humana figura convenire, econtra neceſſe eſt ut is a motu recto & perpendiculari multum declinet eique conſequenter adiumenta externa ab autoribus aſſignata parum aut nihil inſerviant. De ſepto quidem transverſo pulcherrimam obſervationem ſubiungere non abs re erit. Etſi huic ita adaptatus ſit canalis thoracicus, ut in medio proceſſuum ex abdomine verſus thoracem ambulare eaque de cauſa actionem ſepti indeſinenter pati videatur uti omnibus in confeſſo eſt, aliquid tamen adiiciendum eſt ſine quo actio prædicta intelligi minus poteſt. Tres faſciæ ſeu lacerti inſignes canalis thoracici principio applicati circa ultimam vertebram dorſalem in conſpectum veniunt, quorum etſi valde conſpicui ſint tum deſcriptione tum delineatione penitus caremus: Hi partim dextro partim ſiniſtro proceſſui ſeu appendici alligati verſus oppoſitum latus ſic inclinantur, ut a dextris ad lævum & a lævo ad dextrum latus oblique vergentes, ſuper ductus thoracici principium crucem ſeu decuſſim efficiant cum hocce ſolummodo diſcrimine, quod trium harum faſciarum duæ ad dextrum, una ad ſiniſtrum diaphragmatis proceſſum pertineat: Etſi ad regendum forſan lymphæ chylique motum promovendumque, haſce faſcias comparatas eſſe ſatis probabi-

Tres faſciæ musculares a nemine deſcriptæ earumque uſus.

babile ſit, eodem tamen tempore id forte efficiunt ne in magnis compotationibus aliisque occaſionibus nimiam plenitudinem receptaculo inducentibus, disrumpi illud aut ſupra modum dilatari poſſit.

In canalis thoracici fine ſeu inſertione aliud æque artificioſum, æque ignotum quodque pariter uſui ſingulari comparatum eſt machinamentum obſervare proclive eſt. Ante oſculum eius *a*, quod in ſubclaviæ parietem poſticum implantatum eſt, chordæ ſpecies *b*. e venæ iugularis regione veniens dictoque oſculo circumducta appoſita eſt. Eius principium gemino proceſſu ſeu crure conſtans ſub valvula prædictæ venæ oſtio accumbente conſpicuum eſt, uti diducta valvula id conſpicere fas eſt: Hinc facta crurum coniunctione chorda ſeu lacertus ad ductus thoracici oſculum recta contendens illudque zonæ ,ſeu annuli inſtar cingens ambiensque producitur; Equidem in hocce exili ſed eleganti lacerto ſingularis artificii characteres ſatis luculentos adeoque ſive ad diſſepimentum ſive munimentum oſculi ſive directionem chyli aut ſanguinis ſive actionem propriam valvulæ aptiſſimos internoſcere licet: Nam ad valvulæ baſin chorda memorata ſic prætenſa & alligata eſt, ut propter fibram tendineam ſpecie ſuturæ per medium eius ductam, neceſſe ſit valvulam contracta chorda ſimul contrahi & viciſſim explicari; Cuius proinde chordæ conformatio & diſpoſitio tam certa tam conſtans eſt, ut quando plura oſcula occurrunt, quemadmodum tria a nobis obſervata ſunt aliquando, totidem valvulis totidem ſimul chordarum appendices reſpondentes in conſpectum veniant.

Machinamentum artificioſ. in fine canal. thorac. *Tab.* 12. *Fig.* 2. *Lit.* a. b.

Po-

Valvula canalis thoracici.

Poſtremo iuxta fibram iſtam tendineam, veram ac integram habitudinis & configurationis valvulæ cognitionem nihil tale opinantes aſſecuti ſumus. Ea quidem primo aſpectu ſpeciem valvulæ bivalvis refert, quia propter ſubtilitatem adminiſtrationisque difficultatem difficile eſt omnia promte ac ſufficienter uti decet perſpicere: Poſtmodum adhibita maiore diligentia conſtat eam neque ad bivalvium neque ad ſemilunarium ſed diſtinctum valvularum genus reducendam eſſe: Namque ſuper foramen ſeu oſculum ovale quod transverſim locatum eſt, ſic adaptatam vidimus valvulam ut fimbriæ totam oſculi circumferentiam occupanti ſimilis eſſet; Ad hæc non æqualiter lata & ampla eſt prædicta fimbria, ſed ea parte ſeu extremitate, qua fibra tendinea chordæ ſupra memoratæ eam pertranſit amplior latiorque eſt quam toto alias ambitu, quo efficitur, ut ſingularis cuiusdam ac novæ valvulæ characterem præ ſe ferat.

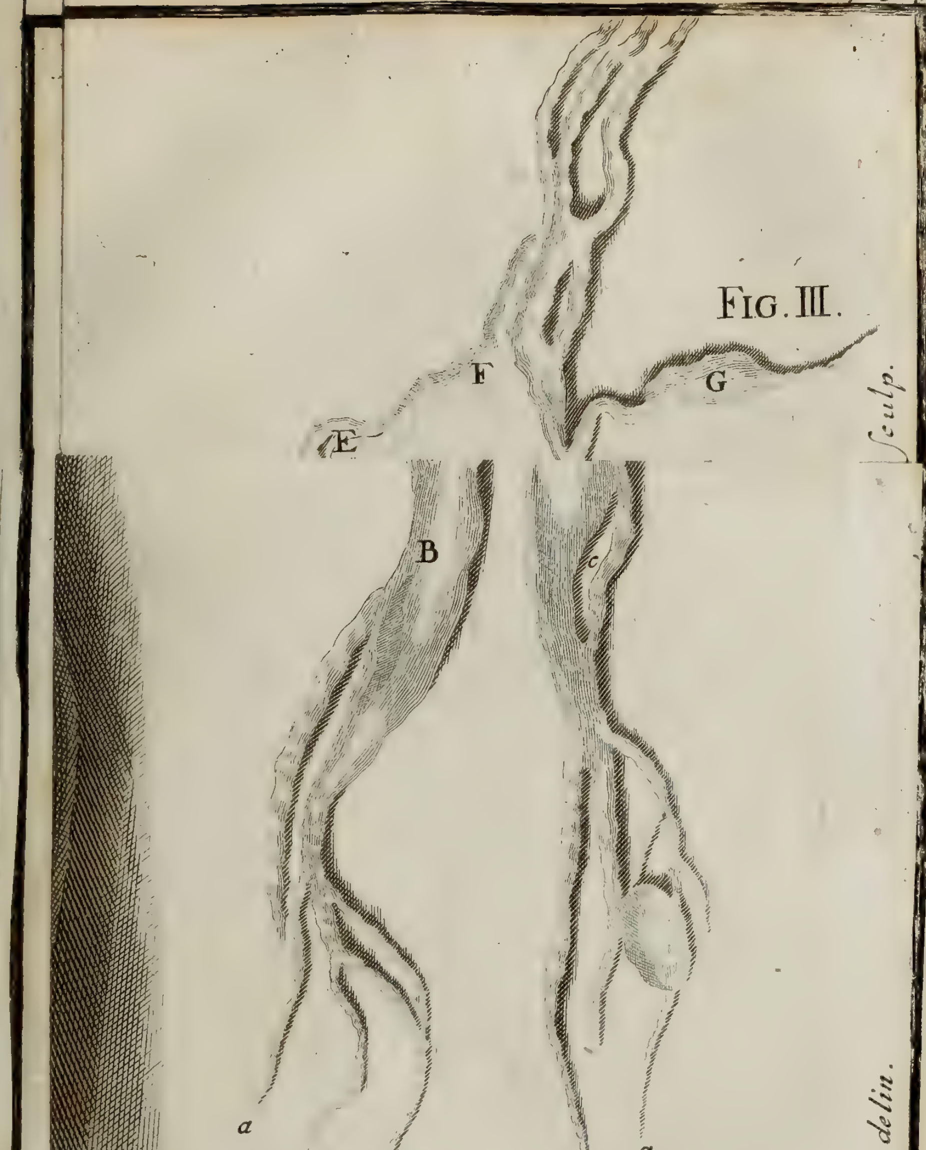


FIG. III.


Fig I.
Fig. II.
Fig. III
Fig IV.
C. P. Schwenter. delin.

TENTAMEN NOVAE DE MOTV MVSCVLORVM THEORIAE

Auct.

Daniele Bernoulli Ioh. F.

Sectio I.

I.

INflationem muſculorum ſine prævio ſpirituum animalium per nervos in fibras muſculares influxu fieri non poſſe Phyſiologorum ſtatuunt plerique, idque præſertim colligunt ex eo, quod impedito per ligaturam nervi ſpirituum influxu, nullus plane ſuccedit muſculi illius, ad quem nervus tendit, motus. Argumenta alia attuli quam plurima in diſſertatione *de Reſpiratione*. Prouti autem in hoc ſatis conveniunt, ita e contrario maxime ambigunt de modo, quo ſpiritus muſculos inflare brevioresque reddere poſſint: Alii autumant, ſpiritus facere in fibras muſculares, quod aqua in funes: (funes enim madefacti intumeſcunt, contrahuntur & pondera ingentia elevant) Sunt qui vaſa ſanguifera a ſpiritibus comprimi, ſicque ob motum ſanguinis impeditum muſculos turgere dicunt; multi denique, quorum ſententia invaluit maxime, putant effervefcentiam in ſanguine ſubitaneam oriri a ſpirituum mixtura talem, quæ machinulas, quas dicunt, ſeu loculamenta in cavitatibus fibra-

M. Aug. 1726.

rum muſcularium recondita inflare poſſit ; alii rurſus aliter ſenſerunt, quæ ſententiarum diverſitas ſatis probat, vix aliud quam conjecturas in hoc argumento incerto dari poſſe, hasque inter illam optimam eſſe dicendam, quæ minimas patitur difficultates.

II. Problemata, quæ circa motum muſculorum proponi poſſunt, talia ſunt: 1. quomodo muſculi notabiliter breviores fieri poſſint ? 2. quomodo minima ſpirituum quantitas & ſine ullo fere ſui diſpendio ſubſequente muſculos ita decurtare valeat? 3. quo pacto muſculi breviſſimo tempore & contrahi & reſtitui queant? Theoriam admitti poſſe nullam, quin hiſce quæſtionibus plane ſatisfiat, quilibet videt : Sunt dein alia phænomena non ita ſtricte ad propoſitum pertinentia, quorum tamen genuina explicatio non parum roboris theoriæ conciliare poteſt : Nullam denique motus muſculorum rationem excogitabimus, quin in multa problemata Geometrica pertrahamur, ſi veras menſuras, ſine quibus nihil unquam certi ſtatui poteſt, deſideremus : Eiusmodi ſunt illa, quæ in Sectione ſecunda tradam.

III. Incipiam a ſtructura muſculi quantum id inſtituti noſtri ratio poſtulat; conſtat ex anatomicis, nullum eſſe muſculum, ad quem non tendat ramus arteriæ, a cuius ligatura (quod hic in tranſitu dixerim) non minus quam ab ligatura nervi muſculus motum ſuum perdit, quamvis non ita promte. Ipſe vero muſculus maxima parte conſtat ex fibris longitudinalibus, tum etiam ex minimis fibrillis transverſalibus: de utroque genere monenda & notanda quædam habeo ſpeciatim.

IV. *Fibræ longitudinales* dividi facile poſſunt in alia

lia filamenta multo magis ſubtilia atque ita diſpoſita , ut cylindrum cavum efforment ; concipio hæc filamenta ut laxe quidem inter ſe connexa, ſed quæ tamen non facile extenduntur : ita fiet ut cum cavitas fibræ longitudinalis inflatur, filamenta circa medium aliquantulum a ſe invicem recedant, ſed in longitudinem parum vel nihil creſcant. Concipe *filamenta* quamplurima, quorum extrema ſint *ac* & *bd* ita laxe inter ſe connexa ut facile *bd* poſſit deduci ab *ac*, quæ autem in longitudinem difficulter extenduntur. Cogita dein iſta filamenta in cylindrum convolvi ita, ut *ac* & *bd* ad ſe invicem accedant, & ſic habebis fibram longitudinalem, qualem vides repræſentatam per AB. Cavitas autem quæ interne relinquitur ſemper repleta eſt ſanguine, id quod ſatis apparet ex fibrarum rubedine & ſuperveniente colore albicante , ſi per muſculi arteriam iniectiones fiant cum aqua tepida. In tendinibus fibræ ſolidiores ſunt & compactiores nec proin ſanguis illarum cavitates ſubire poteſt ; unde color albus. *Fig.* 1. *Fig.* 2.

V. Pergo ad *fibrillas transverſales* : has videmus perpendiculariter incedere ſuper fibris longitudinalibus ad certas quasdam diſtantias : connectuntur earundem ope fortiter *filamenta* fibras longitudinales componentia : pono enim fibrillas transverſales ab uno filamento ad aliud procedere ſicque totam fibram longitudinalem amplecti inſtar annuli ; tales fibrillæ transverſales in figura prima exprimuntur per lineas *ef*, *gh* &c. & in figura ſecunda per circellos EF, GH &c. atque ſic dividitur cavitas totius fibræ longitudinalis in plura *loculamenta* (alii *machinulas* dicunt) quale eſt v. gr. EFGH comprehenſum inter duas fi-

brillas transverſales vel annulares EF, GH: Cæterum non dubito, quin hæ fibrillæ transverſales meræ ſint nervorum propagines, ſunt enim, ut ex anatomicis conſtat, *tenaces & duræ, diſtractioni & rupturæ reſiſtunt, dum apice acus eas diſcindere tentamus.* conf. *Borell. de mot. anim. part.* 1. *prop.* 1.

VI. Quæ de ſtructura muſculi præmiſi fere omnia ab anatomicis iam fuere demonſtrata; pauca mente ſupplenda ſuppoſuimus, ſed certe nihil quod cum obſervationibus celeberrimorum quorumvis Anatomicorum vel minimum repugnet: Tuto proin amplectemur, quicquid ex iis eliciemus. Dixi in præcedente §. cavitatem fibræ longitudinalis diſpeſci in plures *machinulas* terminatas ab utraque parte a *fibrilla transverſali* vel potius *annulari*; talis exhibetur in figura ſecunda pér EFGH; ſed ut diſtinctius appareret, illam ſeorſim repræſentavi in figura tertia ſub forma cylindri, cuius baſis eſt circulus
Fig. 3. EFM vel HGN & cuius altitudo eſt EH vel MN vel FG. Oſtendendum eſt, quo modo minimo ſpirituum influxu talis machinula cylindrica poſſit acquirere formam dolii valde ventricoſi, atque ſenſibiliter decurtati, qualis figu-
Fig. 4. ra quarta exhibetur.

VII. Cogitemus hunc in finem fibrillas annulares EMF & HNG paululum contrahi (hanc autem contractionem explicabo inferius) in longitudinem alterius figuræ *emf* & *hng*; mutabitur figura cylindrica in aliam convexam & talem, ut 1mo ſingula *filamenta eph*, *mn* &c. longitudinem conſervent quam ante habuerant; Difficulter enim extenduntur: & 2do ut capacitas *machinulæ* in utroque caſu ſit eadem; Eſt enim *machinula* ſanguine repleta

pleta, qui neque erumpere neque aeris inſtar in minus ſpatium redigi poteſt? Ad hæc requiritur, quod in Sectione ſecunda demonſtrabo, ut machinula in longitudine contrahatur nempe ut acquirat longitudinem *mn*, cum ante haberet longitudinem MN, tum etiam neceſſe eſt, ut intumeſcat circa medium ita ut amplitudo media PQ excreſcat in maiorem *pq*; nihil vero eſt quod impediat iſtam intumeſcentiam ob laxam, quam inter ſe habent *filamenta*, cohærentiam. Confer ubique §. 4.

VIII. Videtur iam tota quæſtio eo reducta, ut indicetur modus, quo fibrillæ transverſæ contrahuntur: hunc vero ex ipſo ſpirituum animalium influxu immediate deduco: Spiritus enim utcunque ſubtiles, ſpatium tamen occupent neceſſe eſt, poſſunt itaque minimas cavernulas fibrillarum transverſalium replere, ſicque aliqualem in hiſce fibrillis contractionem producere; minima certe ſpirituum quantitas ad hoc negotium ſufficiet 1mo quia exigua contractio requiritur, oſtendam enim deinceps parvulas in *fibrillis transverſalibus* contractiones ſat magnas producere poſſe in *fibris longitudinalibus*, ſi certæ proportiones aſſumantur; 2do quia cavernulæ *fibrillarum transverſalium* minimæ ſunt & plane non comparandæ cum cavitatibus fibrarum longitudinalium. Huc quoque facit, quod dixi in fine §. 5. *fibrillas transverſales* meras nervorum videri propagines. Cæterum non opus puto ut moneam, de ſingulis machinulis intelligendum eſſe, quod de unica dixi, & ſic quamlibet fibram longitudinalem totumve muſculum contrahi poſſe.

IX. Diſpiciamus nunc in quantum hæcce noſtra ſententia ſatisfaciat deſideratis §. 2. expoſitis; præcipuum

eſt, *an muſculus notabiliter decurtari poſſit*? De hoc ipſe dubitaveram ante inſtitutum calculum, facile videns capacitatem machinulæ alicubi maximam eſſe; ſed docuit me poſtea calculus, fieri poſſe, ut muſculus plane quinta totius longitudinis ſuæ naturalis parte brevior fiat, ita ut ſi quis muſculus quinque pollices longus ſit, is maxima ſui contractione ad quatuor pollicum longitudinem reducatur. Sufficit autem hæc contractio abunde phænomenorum explicationi: dubito enim num experimentis demonſtrari poſſit eſſe vel unicum muſculum qui maiori quam quinta longitudinis ſuæ parte contrahi queat. Experimentum feci, quod videre eſt in fine huius ſectionis, quo maximam muſculorum rectorum oculi contractionem exploravi, & inveni, quod ipſe vix ſperaſſem, & de quo hæſito, an non caſui potius attribuendum ſit, quam alicui neceſſitati, inveni, inquam, contractionem maximam in dictis muſculis tantillo minorem, quam quæ modo definita fuit; dabitur forſan occaſio alia plura de hac re experimenta inſtituendi.

X. Pergo ad alteram quæſtionem, *an contractio muſculi minimo ſpirituum influxu & ſine ullo fere eorundem diſpendio ſuccedere poſſit*? partem quæſtionis primam ex §. 8. ſatis confirmari puto; circa alteram vero partem obſervo, quod motus muſculorum ſine minima ſpirituum iactura omnino fieri poſſit, ſiquidem nihil impediat, quo minus ſpiritus poſt muſculi actionem a *fibrillis transverſalibus* verſus principia nervorum refluant: id ipſum autem ideam noſtram non parum commendat. Apparet denique & contractionem & reſtitutionem muſculi momento citius abſolvi poſſe, neque enim aliud ad id tempus requi-

requiritur quam quod a fluxu & refluxu ſpirituum impenditur, id eſt, breviſſimum. Interim quid ſit, quod ſpiritus a nervorum principiis ad ultimas extremitates fluere faciat id aliis indagandum relinquo, refluxum autem deduco a virtute elaſtica *fibrillarum transverſalium*; ſic dicendum eſt muſculum in contractionis ſtatu permanere, quamdiu æquilibrium adeſt inter illud prius motus principium, quodcunque ſit, & conatum qui ineſt minimis *fibrillarum transverſalium* particulis ſeſe reſtituendi.

XI. Superſunt alia quædam indicanda, quæ pro ſententia noſtra facere videntur: Dein huic primæ ſectioni finem imponam. Dixi ſupra, fieri poſſe, ut ſpiritus omnes, vel ſaltem maxima eorundem pars, poſtquam in muſculum egerunt, refluant; Si enim avolare dicas, unde tanta ſpirituum quantitas, qua continuo reparari poſſint? Solum cor plus centies millies contrahitur quotidie, cogites de homine pedibus iter ingrediente, de actione continua plurium aliorum muſculorum vitalium; fingas haud exiguam alimentorum partem in ſpiritus converti, vix tamen milleſimam grani partem obtineas pro una cordis ſyſtole, de qua ego non video, quomodo tantæ contractioni ſufficere poſſit. Facile porro intelligitur cur ligata arteria motus pereat in muſculo, ad quem arteria tendit, niſi enim *machinulæ fibrarum* ſanguine repletæ ſint, motus ſuccedere nequit, unde novus ab arteriis ſuppeditetur continuo ſanguis neceſſe eſt, ſequitur exinde quoque ligatura arteriæ motum in muſculo paulatim non protinus tolli, quod experientia confirmatur. Quod in tendinibus nulla contractio vel intumeſcentia obſervatur, id peti debet ex ultimis verbis §. 4. Denique cur

nullus

nullus muſculus in continuo contractionis ſtatu vel per horulæ quadrantem permanere poſſit non a defectu virium, ſed ab impedita circulatione ſanguinis per *machinulas* deducendum eſſe exiſtimo. Supereſt experimentum, de quo in fine §. 9. mentionem feci.

Experimentum Pro inveniendis maximis contractionibus muſculorum rectorum oculi.

Fig. 5. IN plano verticali duxi lineam horizontalem *hm*, in cujus extremitatibus *h* & *m* affixi utrobique chartulam characteribus notatam, dein in eadem ab horizonte altitudine inquiſivi, locum, in quem oculum dextrum (clauſo ſiniſtro) ponere poſſem, ita ut in utraque chartula characteres diſtinguere valerem immoto capite, ſed moto bulbo oculi, modo verſus internum modo verſus externum canthum. Locum autem ſolicite exploravi proximum, quantum fieri poſſet, lineæ *hm*; omni porro, qua poteram, vi oculum detorſi in utramque partem, curans ut in neutram partem inclinarem caput, tandem exactiſſime locum detexi: Dicam quid invenerim. Repræſentet circellus *cdfe* ſectionem horizontalem bulbi in eodem plano cum linea *hm* conſtitutam, ſitque linea *op* perpendicularis in lineam *hm*, inveni $op = 7$, $hp = 8$, & $pm = 6$, ibi cum oculus conſtitutus erat poteram detorquendo oculum pro lubitu in utraque chartula characteres diſtinguere, at appropinquando caput tantillum verſus *p*, in neutra diſtinctio apparebat, & declinando caput in alterutram partem

tem

tem motu parallelo cum *lm* in altera ſchedula diſtincte in altera confuſe apparebant characteres.

Ut intelligatur, quid ex iſto experimento ſequatur, ad duo attendendum eſt; 1mo quod oculus dum in orbita ſua movetur, ipſius centrum *o* immotum manet; 2do quod in retina ſive, ut alii volunt, in choroidea unicus ſit loculus puta *q*, in quo diſtincte imaginem percipimus, qui fere pupillæ *n* oppoſitus eſt. Ut itaque obiectum in *b* diſtincte videamus, requiritur ut locus *q* perveniat in *f* ſeu *n* in *c*, hicque motus fit ope muſculi adducentis *bxg*, extenditur autem ſimul ipſius antagoniſta ſeu abducens *asg*, & ſi abducens agit, quantum poteſt, pervenit punctum *q* in *d* ſeu *n* in *e*, extenditurque muſculus adducens: ergo dum oculus movetur v. gr. a *c* in *e* dimidium motus fit a reſtitutione muſculi abducentis, reliquum ab eiusdem contractione, invenitur autem angulus *hom* ex trigonometricis eſſe 89 grad. 26 min. eiusque dimidius $44^{\circ}.\ 43'$. dicendum ergo muſculum abducentem maxima ſua contractione rotationem producere in oculo $44^{\circ}.\ 43'$. totidemque alterum adducentem.

Porro prædicti muſculi *asg*, *bxg* inſeruntur bulbo oculi haud procul ab iride puta in *a* & *b*, cum eodemque uniti ſunt usque in *s* & *x* ita ut *gs*, *gx* fere tangant circulum, obſervavi etiam eſſe *sg* vel *xg* ad diametrum bulbi fere ut 20 ad 9; ex his datis haud difficulter infertur, quanta ſit maxima abducentis contractio, ſumatur nimirum arcus *st* $44^{\circ}.\ 43'$. & ducatur *gt*, erit *gt* ad *gs* proxime ut 9 ad 11. hincque ſequitur maximam muſculi abducentis contractionem eſſe æqualem $\frac{2}{11}$ ſeu paulo minorem quinta longitudinis naturalis parte. Expe-

rimentum ſimili modo circa muſculum attollentem & deprimentem inſtitui poteſt, ſi loco *hm* horizontalis alia verticalis ducatur.

Sectio II.
QVA VARIAE DILVCIDATIONES GEOMETRICAE IN PRAECEDENTEM THEORIAM EXHIBENTVR.

I.

T*Heorema* I. curva quam ſingula *filamenta* faciunt durante *machinulæ* inflatione ſemper eſt elaſtica, cuius axis coincidit cum axe *machinulæ*.

Demonſtratio. Concipiamus duo plana infinite propinqua, quorum interſectio communis ſit axis machinulæ, erunt ſinguli arculi circulares in ſuperficie machinulæ, a duobus planis reſecti ut diſtantiæ ab axe, ſi iam porro conſideremus fluidum machinulæ incluſum ut elaſticum, neceſſe eſt per leges hydroſtaticas, ut fluidum ubique eundem habeat elaſticitatis gradum, quapropter potentiæ *filamentum* illud comprehenſum inter duo plana extendentes, erunt ubique ut latitudines *filamenti* ſeu ut arculi intercepti inter duo plana ſive ut diſtantiæ ab axe, id eſt, ut applicatæ ad curvam quæſitam, conſtat autem ex mechanicis, potentias ſemper eſſe reciproce ut radii oſculi, erit itaque curva, quam *filamentum* induit, huius

huius indolis ut habeat ubique applicatas ſuas reciproce proportionales radiis oſculi, quam proprietatem elaſticæ convenire conſtat.

II. *Schol.* 1. Differt itaque curva, ad quam *filamenta* ſe componunt in noſtra hypotheſi ab illa, quam induunt in hypotheſi effervеſcentiæ; in hac enim filamenta durante muſculi inflatione eandem latitudinem conſervare aſſumitur, & ſic hiatum inter duo quævis *filamenta* proxime intervenire, per quem aer poſtquam impetum fecit in filamenta, avolare poſſit, atque in hac hypotheſi circularem figuram filamentis attribuendam eſſe, certiſſimum eſt; quod nuper demonſtravit Cel. *Petrus Antonius Michelotti* in apologia, quam pro Patre meo conſcripſit contra Cl. *Mead*, quem tamen pro ſua hypotheſi recte concluſiſſe minime negamus.

III. *Scholion* 2. Cavendum, ne hic ordinaria æquatio elaſticæ accipiatur, quæ minus generalis eſt; nam ſequeretur exinde, nullam in machinulis ſuccedere poſſe mutationem ſi filamentum EPH & ſolidum ex ipſius revolutione circa axem MN generatum conſiderantur ut invariabilis & conſtantis magnitudinis. Tradam itaque æquationem generalem pro omnibus elaſticis inſtituto noſtro ſatisfacientibus. Sit MN axis curvæ biſectus in R, ducantur perpendicularis RP, eique parallelæ duæ applicatæ proximæ ca, db, ſit $Rc = x$, $ca = y$, $Pa = s$, $cd = dx$, $oa = -dy$, $ab = ds$: habemus itaque poſito elemento ds conſtante radium oſculi $= -\frac{dyds}{ddx}$. ergo per proprietatem elaſticæ erit productum ex applicata in radium oſculi = conſtanti, ponamus quantitatem illam conſtantem $= \frac{1}{2}aa$, & habebitur $-ydyds = \frac{1}{2}aaddx$ & integrando cum additione conſtantis cuiuſdam homogeneæ qualis eſt $+\frac{1}{2}bbds$ *Fig.* 6.

 habe-

habebitur $+bbds-yyds=aadx$, & ſumendo quadrata ponendoque dx^2+dy^2 pro ds^2 , poſteaque reducendo æquationem obtinebitur æquatio finalis $-dx = \frac{(\pm bb+yy)dy}{\surd(a^4-b^4\pm 2bbyy-y^4)}$; ſumo $-dx$, quia vi æquationis utrumque ſignum accipi poteſt, creſcente autem x ponitur decreſcere y.

IV. *Coroll.* In puncto P debet elementum abſciſſæ infinite eſſe maius quam elementum applicatæ, hoc autem fit, ſi in prædicta æquatione $-dx = \frac{(\pm bb+yy)dy}{\surd(a^4-b^4\pm 2bbyy-y^4)}$, ponatur denominator $=o$; unde obtinetur $a^4-b^4\mp 2bbyy-y^4=o$; vel $aa=\mp bb+yy$, vel deniq; $y=\surd(aa\pm bb)$, eſt itaque $RP=\surd(aa\pm bb)$.

V. Quoniam pro maxima poſſibili contractione muſculi eruenda requiritur ut algebraice exprimatur tam ſolidum quod generatur ex revolutione curvæ EPH ſive dimidiæ PH circa axem MN , quam longitudo curvæ, quoniam etiam hæ algebraicæ expreſſiones valde fiunt prolixæ & non niſi magno labore obtinentur per appropinquationes, ideo aliam curvam loco elaſticæ accipiemus tractabiliorem , ſed quæ tamen a figura elaſticæ parum recedat. Pro idonea ſubſtitutione duo requiruntur , 1mo ut curva in P ſit perpendicularis, & 2do ut radii oſculi creſcant decreſcentibus applicatis, ita ut ubique radii oſculi fere ſint in reciproca ratione applicatarum. Poſteriori conditioni ſatisfacit huiusmodi æquatio $c-x=(3bby+y^3) : 3aa$, quæ dat radium oſculi ubique $= (a^4+(bb+yy)^2)^{\frac{3}{2}} : 2a^4y$, quæ expreſſio indicat eſſe proxime

xime radium oſculi applicatæ reciproce proportionalem, modo y valorem non habeat plus quam mediocrem reſpectu quantitatum a & b. Sed hæc curva nullibi eſt ad applicatam perpendicularis, aut itaque ad altiores æquationes deveniendum erit aut in alia curva acquieſcendum non ita ſtricte deſiderato ſecundo ſatisfaciente. Credo autem melius fieri non poſſe ob multas rationes quam conſiderando curvam PH tanquam parabolam cuius axis eſt PR & cuius vertex P. Eſt enim hæc curva perpendicularis in P ad PR; creſcunt quoque radii oſculi decreſcentibus lineis ac; ſuntque fere in reciproca conſtanti ratione ſi parameter parabolæ magna ſit & ramus PH exiguus accipiatur, quod utrumque fit in hypotheſi noſtra. Denique hoc commodi accedit, quod tam ſolidum rotatione curvæ circa RN generatum quam ipſa curvæ longitudo poſſint quantitatibus finitis exprimi.

VI. Sit iam RN $= c$, RP $= b$, parameter $= a$, & erit NH $= \frac{ab - cc}{a}$; ſit porro quadratum radii ad aream circuli ut 1 ad m & erit ſolidum circumvolutione curvæ PH circa RN deſcriptum $= (15maabbc - 10mabc^3 + 3mc^5) : 15aa$ & longitudo curvæ PH $= \frac{a}{4} \log. \left(\frac{a}{\sqrt{(aa+4cc)} - 2c}\right) + \frac{a^3}{16\left(\sqrt{(aa+4cc)} - 2c\right)^2} - \frac{\left(\sqrt{(aa+4cc)} - 2c\right)^2}{16a}$; & cum utraq; quantitas (ſolidum & curvæ longitudo) ſit conſtans priorem faciemus $= mn^3$, poſteriorem $= 100$, prior æquatio quam deinceps vocabo (A) dat $b = \frac{cc}{3a} + \sqrt{\left(\frac{45aan^3 - 4c^5}{45aac}\right)}$: altera

 æqua-

æquatio (quam vocabo B) talis eſt $4a \log. \left(\frac{a}{\sqrt{(aa+4cc)}-2c}-1\right)$
$+\frac{a^3}{\left(\sqrt{(aa+4cc)}-2c\right)^2}-\frac{\left(\sqrt{(aa+4cc)}-2c\right)^2}{a}=1600.$

VII. *Theor*. II. Non poteſt muſculus contrahi ultra quintam longitudinis ſuæ naturalis partem.

Demonſt. Si in æquatione (B) conſideretur *a* ut quantitas variabilis, facile tentanti apparebit eſſe alicubi radicem totius quantitatis complexæ maximam. Si dein *c* ponas eſſe maiorem quam 80, erit illa radix maxima maior quam 1600, ſecus erit minor, unde liquet æquationem B nullam habere radicem realem, quoties *c* minor eſt quam 80. Sed *c* eſt = RN = dimidiæ longitudini muſculi contracti, & PH = dimidiæ longitudini muſculi non contracti = 100; ſumma itaque contractio non poteſt excedere quintam longitudinis naturalis partem.

VIII. *Scholion.* Quoties *c* maior eſt quam 80 habet æquatio B duas radices, id eſt, duo valores litteræ *a* aſſignari poſſunt qui æquationi (B) ſatisfaciunt, inter quos maior eſt accipiendus. Aſſignavi autem valorem litteræ *c* vero paulo minorem, propius ad verum accedes, ſi definito numero addas 4 centeſimas. Poſſunt vero huiusmodi minutiæ negligi. Feci quoque calculum in hypotheſi, eſſe curvam PH arcum circularem & tum inveni maximam contractionem partium 18, cumque parabola magis accedat ad naturam elaſticæ quam circulus radios ſuos oſculi conſtantes habens, ſtatuendum eſt admiſſa elaſtica, maximam contractionem paulo maiorem eſſe quam illa quæ oritur, cum PH conſideratur ut arcus parabolicus; unde ut numerum rotundum habeamus, illam faciemus partium 20 ſeu unius quintæ totius muſculi longitudinis.

IX.

IX. *Theor.* III. Ut muſculus quantum fieri poteſt contrahatur, requiritur ut longitudo machinulæ ſit ad eiusdem diametrum in maiori ratione quam 100 ad 77.

Dem. Theorema manifeſtum fiet conſiderando quid fiat ſi ſucceſſive minor accipiatur diameter machinulæ poſita eiusdem longitudine conſtanti; determinatur autem diameter machinulæ ab ipſius ſoliditate; unde ſtatim ponemus loco n^3 numerum ſat magnum, dein minorem continuo. Sit primo loco $n^3 = 4000000$ & cum in ſtatu naturali muſculi ſit PH linea recta ſeu arcus parabolæ cuius parameter infinita, ponendum ſtatim eſt $a = \infty$; & ſic mutatur æquatio A in hanc $b = n\sqrt{\frac{n}{c}}$, ſed eſt quoque in ſtatu naturali RN=PH ſeu $c = 100$, ergo $b = 200$, & NH$= \frac{ab-cc}{a} =$ (in præſenti caſu) 200, unde poſito $n^3 = 4000000$ fit ſemidiameter machinulæ ad eiusdem ſemilongitudinem ut 200 ad 100, ſeu ut 2 ad 1; hæc ita ſe habent antequam muſculus contrahatur, ponatur iam contrahi muſculum, ita ut RN, quæ antea fuerat centum partium, nunc habeat v. gr. 99. id eſt, ponatur $c = 99$, & ope æquationis (B) inquiratur in valorem ipſius a; dein per æquationem (A) innoteſcet quoque valor ipſius b ſeu RP, & tandem quoque ipſius NH ſeu $\frac{ab-cc}{a}$. Sic invenietur RP, iam maior & NH minor quam 200 part. hocque pacto ſemper aliquid accedet lineæ PR diminueturque linea NH (ponendo ſucceſſive $c = 98$, $c = 97$, $c = 96$ &c.) donec tandem ponas $c = 89$; hunc enim ſi transgrediaris terminum, non amplius decreſcere ſed creſcere rurſus lineam NH deprehendes; unde haud difficulter infertur non poſſe c minorem eſſe quam 89 neque proin muſculi contractio-

nem

nem maiorem quam 11 partium. Ponamus iam valorem minorem pro n^3 quam 4000000 & ſic maior obtinebitur contractio; eſt autem eo usque diminuendum n^3, donec maxima contractio fiat 20 partium; id erit, cum facies $n^3 = 600000$; fitque tunc ſemidiameter machinulæ non contractæ 77 part. patet proin requiri pro maxima contractione ut longitudo machinulæ ſit ad diametrum in maiori ratione quam 100 ad 77.

X. *Coroll.* Ut fibra longitudinalis contrahatur quinta parte oportet ut fibra transverſalis brevior fiat $\frac{27}{77}$ totius ſuæ longitudinis. Poſitis enim $n^3 = 600000$ & $c = 100$, fit NH$=77$ & facto $c = 80$ fit NH$=50$; eſt ergo contractio fibræ transverſalis $\frac{27}{77}$ longitudinis ſuæ totius. Si ad maiorem diſtantiam fibrillæ transverſales eſſent collocatæ, magis contrahi deberent, quæritur ergo an tanta contractio, quæ viginti ſeptem partes ſeptuageſimarum ſeptimarum exæquat, fieri poſſit in fibra transverſali? De hoc autem nequaquam dubitandum: Nam cum cavernulæ fibrarum transverſalium ſpiritibus replentur, diſponuntur ad figuram ſolidi, quod generatur ex rotatione elaſticæ circa axem; & quando prædictæ cavernulæ ſpiritibus maxime ſunt repletæ, fit elaſtica rectangula; eſt autem longitudo elaſticæ rectangulæ ad axem proxime ut 11818 ad 4741: ergo maximæ cavernularum contractiones eſſe poſſent $= \frac{7077}{11818}$, ſeu valde propinque $= \frac{3}{5}$, quæ quantitas multo maior eſt quam $\frac{27}{77}$.

XI. *Theorem.* IV. Si longitudo machinulæ muſcularis habeat ad eiusdem diametrum rationem minorem quam 100 ad 77, nunquam ad quintam partem decurtari muſculus poteſt; & quo minor fuerit ratio longitudinis ad diame-

metrum, eo minores contractiones requiruntur fibrarum transverſalium pro ſimilibus contractionibus fibrarum longitudinalium.

Demonſtratio prioris propoſitionis partis conſtat ex §. 9. altera vero pars eluceſcet, ſi diverſos aſſumendo valores pro n^3 videatur, quanta contractio fibræ transverſalis requiratur in ſingulis caſibus pro contrahenda machinula v. gr. una centeſima. Reperietur autem quod in propoſitione dictum eſt. Ita vidimus in §. 9. quod poſito $n^3 = 4000000$, maxima contractio fibræ longitudinalis ſit undecim illarum partium, quarum machinula in tota longitudine naturali habet centum, & quod pro illa obtinenda fibra transverſalis debeat decurtari novendecim ducenteſimis, quæ quantitas minor eſt illa, quæ pro ſimili effectu requireretur ſi n^3 eſſet $= 600000$.

XII. *Coroll.* Veroſimile eſt, diverſam ſtructuram ineſſe fibris muſculorum longitudinalibus: Scilicet illas minus frequenter decuſſari a fibrillis transverſalibus in muſculis, qui maioribus contractionibus deſtinati ſunt, frequentius in aliis. Diſtantiam autem fibrillarum transverſalium a ſe invicem nunquam excedere $\frac{100}{77}$ partes diametri fibræ longitudinalis; & cum per experimentum Sectioni primæ ſubiunctum conſtet, maximam muſculorum rectorum oculi contractionem fere tantam eſſe quanta vi theoriæ noſtræ eſſe poteſt, ſtatuendum eſt in his muſculis diſtantiam fibrillarum transverſalium parum deficere a $\frac{100}{77}$ partibus diametri fibræ longitudinalis.

Eiusdem
EXPERIMENTVM CIRCA NERVVM OPTICVM.

EXtat in Act. Lipſ. A. 1683. pag. 68. experimentum, quo demonſtratur, ſpatiolum eſſe in media choroidea (ſive, ut alii volunt, retina) ad imaginem obiectorum percipiendam plane ineptum, eoque D. Mariotte uſus eſt contra D. Pecquet in examinando primario viſus organo. Diſceptatum autem fuit a viris clariſſimis, an perforationi choroideæ a nervo optico, an vero plexui vaſculorum ſanguiferorum in retina conſpicuo tribuendum ſit, quod experimento monſtratur. vid. *Hiſt. Reg. Sc. Acad. Paris. conſcriptam a D. Du Hamel.* Ego autem putavi, id diiudicandum eſſe ex figura, ſitu & magnitudine loci illius extra radiorum actionem poſiti; poſſunt enim hæc omnia exactiſſime determinari ſequentem in modum.

Fig. 7. In pavimento (cuius parti aliquot pedes longæ ad meliorem experimenti ſucceſſum pannus niger inſterni poteſt) ponatur moneta argentea O: ducaturque recta OA; Dein accipiatur pendulum, cuius altera extremitas oculo dextro admoveatur, altera ad pavimentum non omnino pertingat. Tandem clauſo oculo ſiniſtro directaque conſtanter dextri acie in imam penduli partem, ita paulatim corpus verſus ſiniſtram promoveatur, ut penduli extremitas continuo ſit in recta OA, quæ dum fiunt, ex-

acte

acte obſervetur locus, ubi obiectum O viſu perdi incipit. Sit ille in C; poſteaque continuando motum, accurate quoque notetur punctum A, in quo obiectum O iterum percipitur: Biſecta linea AC in D, ductaque perpendiculari BH, fiat in BH, quod ante in linea OA, id eſt, diligenter obſerventur puncta B & H tanquam limites intra quos cum exiſtit penduli extremitas, obiectum O viſui ſe ſurripit: linea BH denuo biſecetur in F linea perpendiculari GE, & in hac pari conditione quærantur puncta E & G; idem fiat in aliis lineis LP, MN &c. Atque per omnia iſta puncta ducatur linea curva HEBGH, quæ erit huius indolis, ut quamdiu oculus correſpondet puncto intra curvam, obiectum O nullo modo appareat, ſi extra curvam cadit axis viſionis, idem mox percipiatur. Dicam nunc, quæ ipſe experiundo obſervavi reductis ſingulis quantitatibus ad longitudinem penduli, quam voco 100. Inveni ergo OC=23, AC=10, BD=3, DH=13, & EG=14: Ex quibus liquet, curvam accedere ad ellipſin. Cuius centrum eſt in F, & cuius axis maior eſt ad axem minorem ut 8 ad 7.

Reſtat nunc indagandum, quomodo ex obſervatis his determinari poſſint ſitus, figura & magnitudo ſpatii illius ad viſum inutilis. Id vero nullo negotio obtinetur; cognitis enim lineis AC, EG, LP, MN, HB &c. determinantur lineæ analogæ in oculo. Quamvis autem BH maior ſit quam EG, fient tamen ipſarum analogæ in oculo æquales, adeo ut figura elliptica in circularem mutetur: & erit diameter circelli illius æqualis ſeptimæ parti diametri totius bulbi. Centrum eius diſtabit ſeptem vigeſimis quintis partibus diametri bulbi a puncto pupillæ op-

poſito, eritque ſimul ſupra medium oculi paululum elevatum. Hæc omnia exacte cum nervo optico in oculo humano conveniunt adeo, ut iam ſententia D. Mariotte ſit hac in parte extra omne dubium poſita.

Quod ſi ergo inſertio nervi optici ſit cauſa phænomeni illius a D. Mariotte obſervati, planum eſt, non debuiſſe nervum hunc directe e regione pupillæ in bulbum inſeri: ita enim omnia obiecta in medio perforata nobis apparerent, illudque, in quod oculos defixos nunc habere ſolemus, non videremus: dum vero nervus opticus lateraliter bulbo inſertus fuit, efficitur, ut illa tantum obiecta perdamus, quæ ſub certo angulo ad latus ſunt poſita. Neque unquam unum idemque obiectum amborum oculorum ſenſui ſe ſurripere poteſt, ſi nervi optici a latere ſint oculo implantati; id vero ſemper fieret, ſi eſſent pupillæ e diametro oppoſiti.

Alterum Corollarium, quod deduco ex eodem experimento, tale eſt. Non potuit nervus opticus aliter quam ad perpendiculum oculo inſeri. Nam cum locus inſertionis ſit ad viſum inutilis, natura in id intenta eſſe debuit, ut fieret inter omnes poſſibiles minimus: hocque obtinetur, dum perpendiculariter bulbum nervus ingreditur.

Quod ſi nervi recta ab originibus ſuis, ſcil. cruribus medullæ oblongatæ ad oculos tetendiſſent, neceſſario contra alterutrum præmiſſorum lemmatum peccatum fuiſſet; cum enim principium nervi optici ſit fere e regione oculi conſtitutum, uti hic in A, manifeſtum eſt, eſſe nervum *AB* (quem perpendicularem pono ad ſphæram ſeu bulbum oculi) e regione pupillæ poſitum. Sed ſi nervus

Fig. 8.

late-

fig: 1.

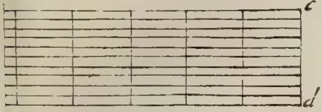


fig: 2.

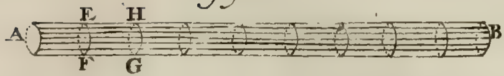
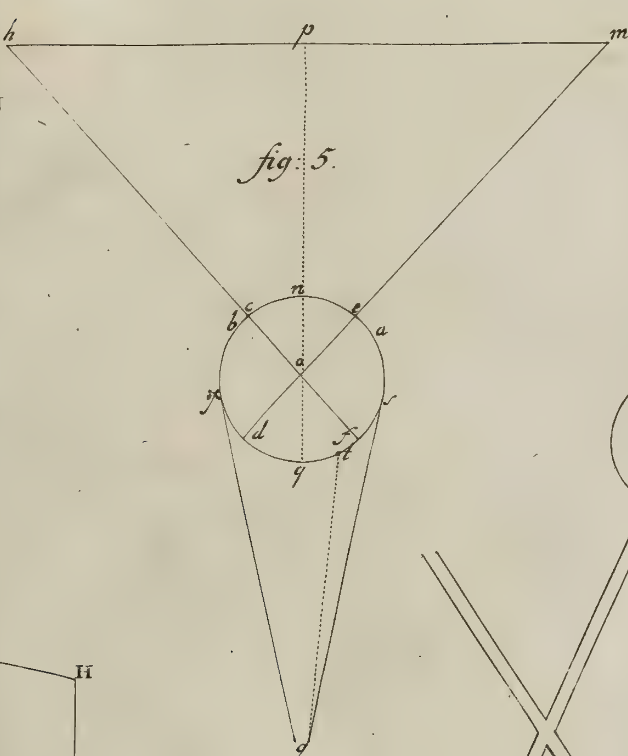




fig: 5.



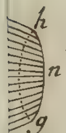
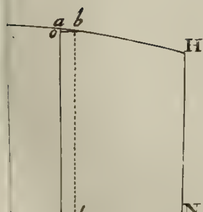




fig:8

6.



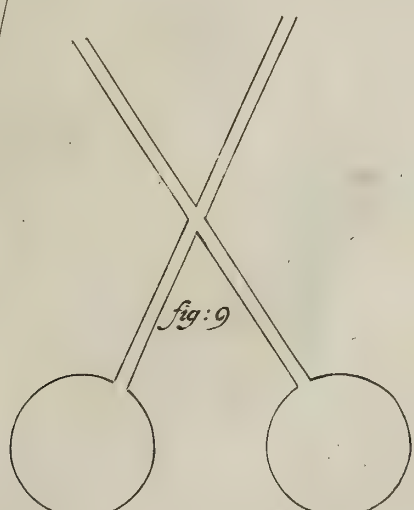
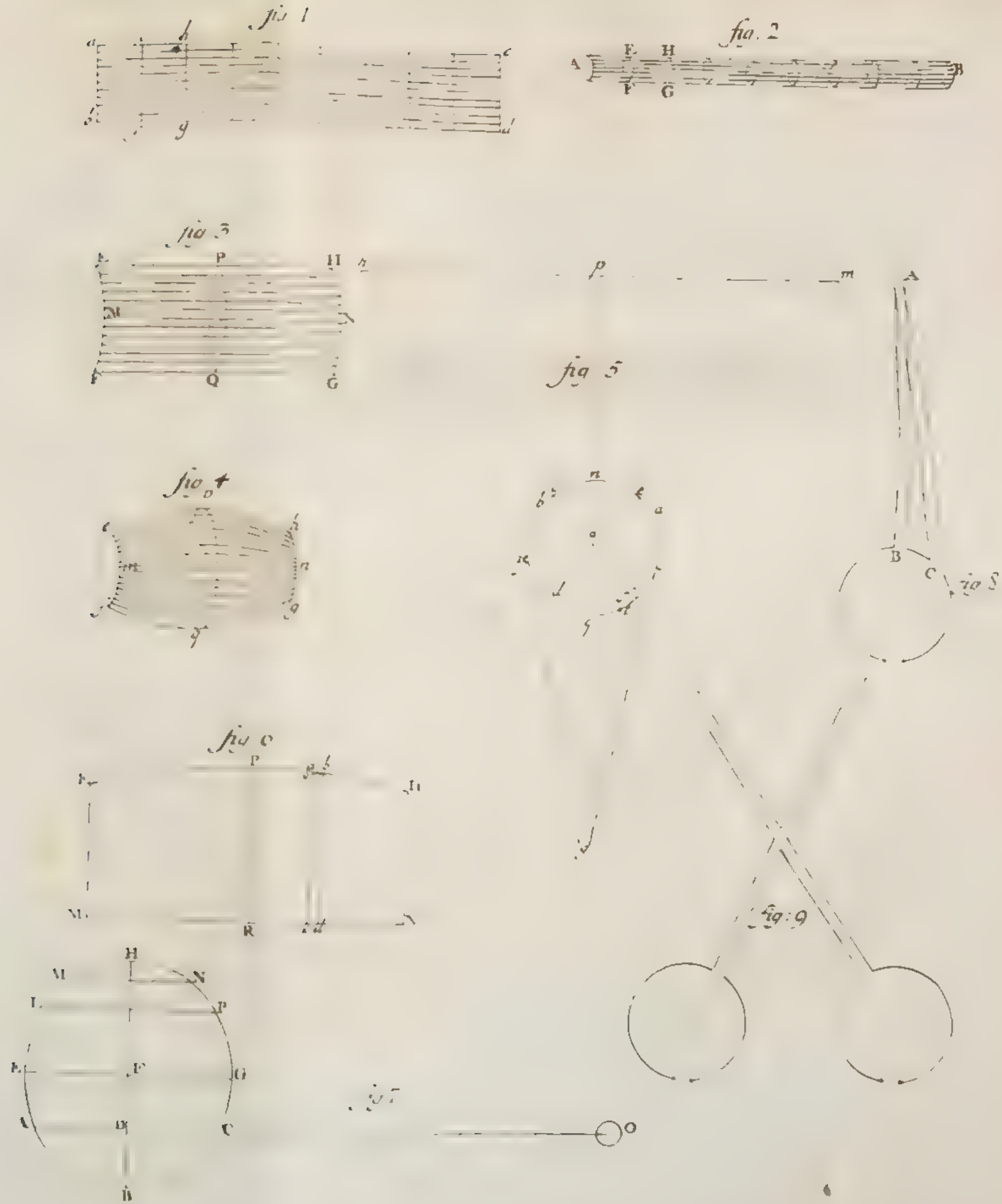


fig:9

fig:7




fig. 2
fig. 3
fig. 5
fig: 9

lateraliter in C fuiſſet oculo inſertus, eo ipſo obliquus evaſiſſet.

Dum vero nervi non recta tendunt ad oculum, ſed prius coniunguntur, utrique poſtulato ex aſſe ſatisfit, uti id ex ſola inſpectione figuræ nonæ apparet. *Fig.* 9.

Si quis exinde rationem coniunctionis nervorum opticorum deducere volet, ei facile ſuffragabor.

DE VARIIS BAROMETRIS SENSIBILIORIBVS, ET EORVM NOVA SPECIE, AC VSIBVS:

Auctore

G. B. Bülffingero.

Recenſio Barometrorum.

I.

ORiginem Barometrorum & ſpecies expoſuit *Dalencéus* ſingulari libello. Pauca ex illo tempore nova acceſſerunt, ſed aliqua tamen, eaque digna Eruditorum attentione. Præcipua Virorum cura fuit, ut variationes altitudinum fiant *ſenſibiliores*; huic enim operæ incubuerunt *Carteſius*, *Hoockius*, *Hugenius*, *Amon-* *M. Aug.* 1726.

 tonius,

tonius , *la Hirius* , *&* *Io. Bernoullius.* Alterum *Amontonii* præ reliquis ſtudium fuit, ut ab effectu gravitatis diſcerneret, quæ *calori* debentur, & liquorum expanſioni. Neque exciderunt conatibus viri ſolertes; præſto ſunt varia illorum artificia, alia tamen aliis meliora. Succurrit & mihi aliquod; videamus, utrum id calculum mereatur intelligentium?

II. Primo dicam *de alienis.* Refero autem ad duas potiſſimum claſſes, quicquid mihi innotuit. *Alii* ſola machinæ *forma* variationes reddere ſenſibiliores laborarunt; *alii* adhibitis diverſæ gravitatis ſpecificæ *liquoribus.*

III. Si pro Mercurio adhiberetur *aqua* , & tubi fierent triginta tres pedes alti, quales in Collegio Cur. *I. C. Sturmii* * videntur: eſſent variationes utique ſenſibiliores multo, quam in Barometris eſſe ſolent mercurialibus ſimplicibus. Verum quis toleranter feret incommodum altitudinis? quis aere aquam purgabit, ut nihil eius ad ſummitatem avolet? & quis in ordinem rediget extenſiones aquæ calori debitas? conglaciationem impedire aliquando poſſumus.

IV. Qui cum *Carteſio* tubum ea in parte , qua Mercurius aſcendendo & deſcendendo ludit, ampliorem faciunt, eidemque aquam vel oleum innatare volunt, variationes in ſtrictiori tubo indicatura; non facile effugiunt incommoda aeris ſuprema occupantis, patiunturque tum ab illo aere, tum ab ipſo liquore variationes a calore oriundas, obſervationemque gravitatis turbaturas. Oſtendit utique *Io. Poleni*, ** repetitis tubi inverſionibus, poſſe præ-

* *P. II. Tent. V. p. 76 ſeqq.* ** *Giornale dei Letter. d'Italia* , *T. 5. p.* 300.

præcipuam aeris, ex aqua evolantis, portionem expelli: an univerſus ita excludi aer poſſit, nec dixero aſſeverate, nec negavero. Illud certum eſt, hoc remedium eſſe magni faciendum, ſi quis uti Carteſiano velit Barometro: Eo enim adhibito præter caloris influxum vix puto ſupereſſe alias difficultates ſenſibiles: irregularitates nimirum a diverſa fluidi ſupra Mercurium altitudine pendentes facile licet ad regulam revocare, & in ipſa graduum ſcala ſimul attendere: ut adeo laudem omnino mereatur illa *Io. Poleni* emendatio.

V. Evitavit priorum aliquot incommoda duplicando tubos *Chriſtianus Hugenius* *. Admonuit vero *la Hirius* ** quæ ſuperſint in Hugeniana conſtructione imperfectiones. Ipſe *la Hirius* eodem duplicationis tuborum artificio, in eum, quem & *Hookius* *** adhibuerat, modum inflexo, evitavit aut imminuit pleraque ſuperiorum incommoda; mediis ingenioſe excogitatis, non tamen ab omni difficultate liberis. Conf. cum ipſius Viri eruditi commentatione allegata *Hermannus* quoque in Phoron. §. 324. & infra §. 12.

VI. Duplicavit alio quidem conſilio tubos *Amontonius*, ſed ea ipſa methodo ſenſibiliores fecit variationes quoque, & nonnulla priorum incommoda penitus evitavit. Legimus artificium conſtruendi Barometrum, cuius altitudo

* *Iournal des Savans A.* 1672. *d.* 12. *Dec. p.* 173. *ed. Bat.* ** *V. Memoir. de l'Acad. des Sciences A.* 1708. *p.* 207. 208. *edit. Batavæ.* *** *Philoſophical Transactions Abrig'd by Iohn Lowthorp. Vol.* 2. *p.* 10. *ex Trans. n.* 185.

do ſit 14 vel 7 tantum pollicum, in ephemeridibus Gallorum *, impletoque intermedio tubo duobus, ſi placet, liquoribus poſſumus variationes multo ſenſibiliores reddere, ac in ſimplici Barometro. Curavi aliqua fieri ab egregio Societatis huius artifice, *Luca de Coſſa*; Neque fefellit ſpem noſtram ſucceſſus: Sed fatendum eſt, in ipſa huius Barometri ſtructura expertos nos eſſe difficultates, quas non facile omnes ſuperabunt; ut adeo non mirer, idem, etſi curioſum & elegans, repetitumque magnis encomiis & peculiari libello ab anonymo Gallo **, paſſim tamen non innoteſcere; nec deſcribi in compendiis vulgaribus.

VII. Iſta pertinent ad claſſem unam. Ex *ſola* Barometrorum *figura* auxilium alii quæſiverunt, & duplici quidem methodo; alteri maiores Mercurio variationes inducere ſtuduerunt; alteri ordinarias obſervare ſaltim accuratius. Illud fecerunt, qui ſuperiorem tubi partem *inclinarunt* a perpendiculo ad horizontem. Antiquum eſt artificium, cuius primum inventorem neſcio; Invenitur autem propoſitum ab Anonymo in Transact. Anglic. n. 236. *** deſcribiturque paſſim ab aliis. Quoniam facile eſt paratu, & augendo inclinationem poteſt reddi ſubinde ſenſibilius, itaque commendari meretur. Supremam tamen exactitudinem variis intercedentibus impedimentis non aſſequitur. Inter illa ſunt frictiones vitri auctæ; cohæſio Mercurii, quæ diffluxum eius in tubis angu-

* *Iournal des Savans. A.* 1688. *d.* 10. *Maii.*
** *Vid. omnino Acta Erudit. Lipſ. ad A.* 1711. *M. Iul. p.* 319. 320. *** *Trans. Abrig'd Vol.* 2. *p.* 12.

anguſtioribus impedit, in amplioribus irregularem præſtat; incommoda caloris per inclinationem ſenſibiliora &c.

VIII. Optimum in hoc genere ſine dubio illud eſt, quod *Ioh. Bernoullio* debemus, expoſitum in Phoronomia *Iac. Hermanni* §. 324. Conſtat ſuperne, ubi variationes fiunt altitudinis, vaſculo ad libitum ampliore, inferne tubus incurvatur, ut horizonti parallelus excurrat; vel, quod in praxi commodius eſt, ſuper plano horizontali ad arbitrium reflectitur. Monuerunt Academici Pariſini, *Ioh. Dom. Caſſinum* ante complures annos talia molitum eſſe, ſed neglexiſſe deinceps hanc methodum, quoniam ſeſe aer Mercurio miſcuerit in tubo horizontali nonnihil ampliore. vid. Phoron. l. c. p. 180.

IX. Feci periculum rei, & deprehendi, *illam ſuccedere*, quando tubi horizontalis diameter lineam non excederet. Metui ab initio frictionum incommoda ob tubi anguſtiam, ſolicitus, ne illæ minores variationes ſufflaminarent: ſed experimento didici, in Barometro *probe* parato tanta non eſſe. Quando enim Barometro antea quieſcente Mercurii altitudinem viſurus ex *la Hirii* præcepto * illud paululum percuſſeram, obſervavi aut nihil aut parum differre loca, in quibus hæreat Mercurius ante & poſt ſuccuſſionem. Scala variationum in eo, quod primum fieri curavi, eſt ſepties maior ordinaria. *Artificium* meum *conſtruendi* hæc Barometra, quia plurimum differt ab iis, quæ proponuntur ab aliis, *Ioh. Bernoullio*

Ss apud

* *Vid. Memoir. de l'Acad. des Sciences. A.* 1712. *p.* 4. *edit. Bat.*

apud Hermannum l. c. & *Chr. Wolffio* in Experimentis Tom. II. §. 33. p. 63. quia ſimul facile & exactum eſt, in notis * dabo.

X. Ex-

* *Aſſumatur portio tubi amplioris 3. digitos longa, & ex uno latere claudatur hermetice, ex altero mediante lampade affigatur tubo cuidam graciliori longitudinis 28. pollicum. Meum quidem inſtrumentum ex utraque cylindri amplioris parte habet tubum graciliorem: Superiorem vero non eſſe neceſſarium facile intelligas. Tubus ita paratus & inverſus impleatur Mercurio usque ad altitudinem unius vel duorum pollicum, cautelis iisdem reſpectu aeris, quæ vulgo attendi ſolent. Hoc facto ſumatur tubus novus tantæ longitudinis, ut nonnihil ſuperet ſpatium, quod pro ratione diametri eius & vaſis ſuperioris amplioris percurret in variatione ſua Mercurius. Sit autem diameter luminis tubi huius circiter unius lineæ. Iungatur hic ope lampadis ad tubum priorem, loco, quo is a Mercurio vacuus eſt. Ex medio tubi amplioris menſuretur media Mercurii altitudo, v. g. 27. pollicum; atque in hac diſtantia mediante lampade inflectatur tubus ita, ut pars una ſit ad alteram perpendicularis. Inflexa hæc pars, quæ inſtrumento debite erecto futura eſt horizontalis, ne nimium occupet ſpatium, aut a linea horizontali facile ſurſum aut deorſum deflectat, in varias iterum inclinari partes poteſt; quas ope tabulæ alicuius planæ facile eſt examinare, &, ſi quæ a plano deflectant, ignis ope reducere. Inverſo inſtrumento Mercurius e tubo ampliori deſcendens implebit non ſolum id, quod*

X. Exactiores facere obſervationes, variationum licet in Mercurio aut liquore adhibito non maiorum, ſtuduerunt *Rob. Hookius*, *Hauksbeius*, *Steph. Gray*, & fortaſſe alii. Illi adhibuerunt pondera, filo circa axem ducto appenſa, quorum alterutrum Mercurio incumberet, alterum libere penderet. Axi indiculum affixerunt, qui gradus circuli, vel minores quascunque diviſiones in tabula circulari deſignaret*. Admonuit vero ipſe *Hookius* ** non reſpondere ſpei ſucceſſum, quoniam per ſaltus indicentur variationes.

in tubo verticali ſupererat, ſed partem etiam tubi horizontalis, in quo deinceps ultro citroque movebitur. Illud probe notandum, in iungendis atque inflectendis tubis gracilioribus cavendum eſſe a nodis & angulis acutioribus, ne augeantur frictionum impedimenta, uti in eiusmodi caſu factum memini. Ceterum ex datis tubi amplioris, & graciliorum diametris facile eſt determinare punctum inflexionis tuborum, & longitudinem tubi horizontalis, ut metus nullus ſit, ne Mercurius vel extra horizontalem ſurſum propellatur ab aere graviori, aut ob leviorem extra tubum horizontalem profluat. Cautionis tamen loco ſurſum reflexi extremitatem tubi horizontalis ad altitudinem unius pollicis, & contra periculum pulveris ſupremum apicem denuo deorſum converti.

* *Vid.* Hauksbee in Curſu Experim. *Tab.* I. *Pnevmat.* ** *Vid. Philoſoph. Transactions Abrig'd, by* Lowthorp. *Vol.* 2. *p.* 10.

XI. *Grayi* artificium elegans eſt, & accuratum, ſi ſolerti manu fabrefiant machinæ*; poteſt etiam adhiberi, ubicunque obſervari altitudo Mercurii in aliquo tubo exacte debet: neque aliis premitur incommodis, quam illis, quæ in Barometro ſimplici occurrunt; eo autem ipſo abeſt a perfectione ſenſibilitatis, quæ quæritur. Quid ſi minoribus aeris variationibus non obſequatur Barometrum ſimplex, uti paſſim eruditi conſentiunt? Eo certe in caſu deſtituet ſpectatores ſuos machina, alioquin peringenioſa.

XII. Diximus, quæ hactenus eruditi artificia propoſuerint, ut, ſi minus noſtra placeant, placeat tamen aliquid ex memoratis. Illud prius admoneri debet, in quo pleraque *omnia* conveniant. 1. Omnia hoc habent, ut Mercurii ſummitas variet; itaque niſi tubus ſit perfecte æquabilis (quis autem hoc ſperet) irregularitates oriuntur a frictione; &, niſi ſit perfecte eiusdem amplitudinis, accedunt aliæ ob rationem tubi capillaris: Notum enim eſt, Mercurium non aſcendere ad libellam in tubis paulo anguſtioribus, idque pro ratione diametrorum. Queritur de hoc incommodo non præter rationem *Iurinius***. 2. Omnia patiuntur difficultatem a diverſitate aſcenſus & deſcenſus Mercurii, qui eo caſu convexam, hoc concavam induit ſuperficiem; adeoque etſi in lateribus vitri eandem attingat altitudinem, gravitatem Atmoſphæræ eandem tamen non indicat. Miror, id nondum eſſe compoſitis exprobratum Barometris. 3. Omnium variationes turban-

* *Vid. Phil. Trans. Abr. l. c. p.* 12. *ex Trans n.* 240. ** *Philoſ. Trans. Abrig'd. by* H. *Iones Vol. IV. P.* 1. *p.* 435. 436. *ex Trans. n.* 363.

bantur a calore & frigore, ob diverſas & irregulares liquorum expanſiones, atque condenſationes. 4. Compoſita omnia urgentur difficultate cognoſcendi diametros tuborum, idque per totam variationis longitudinem. 5. Neceſſaria ſuccuſſio * generat oſcillationes in compoſitis minimum æque incommodas, quam in ipſis ſimplicibus. Denique 6. difficultates parandi a prioribus omnibus ſunt pæne inſeparabiles.

XIII. Non ſoleo difficultates imputare aliorum inventis, niſi methodus mihi ſuccurrat, qua tolli illas vel imminui poſſe autumo. Ut intelligam, quam prope ad veritatem accedam, aut ab ea abſim, accipe ſcopum, & ſtructuram novi cuiusdam Barometri, quod non ita pridem animo ſuccurrit.

Scopus et Structura novi Barometri.

XIV. *Mens eſt*, habere Barometrum, quod variationes gravitatis etiam minores indicet; nihil a tubi inæqualitate incommodi patiatur; nihil a diverſitate aſcenſus & deſcenſus Mercurii; quod expanſiones & condenſationes a calore & frigore oriundas diſcernat ab effectu gravitatis; quod non indigeat menſura diametrorum in tubis; in quo oſcillationes minimum impedimenti faciant; quod ab exhalatione, putredine, congelatione &c. nihil patiatur; quod paratu non ſit difficile; quod denique examen ſuæ exactitudinis ſecum vehat.

XV. Pro hoc fine aſſumatur *Barometrum vulgare* ſim-

* *V. ſupra* §. 9.

ſimplex *recurvum*; annotetur in illo locus ſupremæ altitudinis, idque vel ex obſervatione, ſi iam tum per aliquot annos facta eſt; vel ex menſura actuali altitudinis tubi. Attendatur autem, ut non plus Mercurii ſit in tubo & vaſculo, quam ut ille in parte recurva attingat *d*. locum tribus minimum lineis inferiorem vaſculo *b*, quando ad ſummam poſſibilem altitudinem *a* aſcendit; Poteſt autem loco altitudinis *a* aſſumi quæcunque nonnihil maior illa, quam Mercurius ad ſummum attingit, ſic ut altitudo *da* ſit maior paulo omni hactenus obſervata.

Tab. 15. *Fig.* 3.

Fig. 4.

XVI. Affigatur hic tubus *tabulæ æneæ*, ABCD latitudinis non multo maioris quam eſt ipſe tubus. Dividatur illa incipiendo a linea horizontali *c d* in pollices & gradus, ductis ſcil. lineis ad *c d* parallelis. Excavetur etiam hæc tabula, ut tubus eidem quaſi immitti poſſit, non omnino tamen, ſed pro ſui dimidio, ſic ut tubus ubique ſtringat diviſiones ex utroque ſui latere in tabula factas.

XVII. Immergatur tabula cum tubo v. gr. *in aquam*, donec Mercurius attingat locum *a*. & notetur, ad quam profunditatem tubus ſub aqua merſus ſit. *Dico*, ſi fiat: uti gravitas Mercurii ad gravitatem aquæ, ita altitudo aquæ ſupra lineam *c d* ad profunditatem Mercurii ſub linea *a*; hanc quartam proportionalem a tota altitudine *a c* ſublatam, relinquere *veram Mercurii altitudinem*, ad quam dato tempore per Atmoſphæræ gravitatem ſuſpenſus hæret.

XVIII. *Demonſtratio* facilis eſt; elevatur enim Mercurius a pondere Atmoſphæræ & aquæ incumbentis: detracta igitur altitudine, quæ preſſioni aquæ debetur, reſi-

reſiduum æquipollet preſſioni aeris. Ne calculis opus ſit, dabo facile remedium §. 39.

XIX. Patet autem, hoc Barometrum eſſe tanto *ſenſibilius* ſimplici, quanto liquor, cui tubus immergitur, eſt Mercurio levior ſpecifice. Igitur, etſi non poſſit in infinitum augeri ſenſibilitas, poteſt tamen eousque, ut ſufficiat ſcopo obſervationum.

XX. Poteſt etiam ſine alio medio indagari ipſa *liquoris ſpecifica* ad Mercurium *gravitas*; quod ſi enim attenderis, quanta requiratur ſubmerſionis profunditas, donec Mercurius elevetur ad altitudinem unius digiti, ratio gravitatum ſpecificarum erit inverſa altitudinum memoratarum.

XXI. Atque ut hoc exacte obſervari poſſit, adhibere vitrum licebit convexum, ſimplex aut duplicatum, cum aut ſine filis, affixum tabulæ, ſic tamen, ut ſurſum, deorſumque moveri ſibi parallelωs poſſit; ita enim fiet, ut videri exactius poſſit terminus Mercurii in tubo, & illius cum linea tabulæ adpoſitæ, ad quam examinatur, congruentia. Atque hic uſui eſſe poteſt artificium *Steph. Grayi*, ſuperius §. 11. memoratum. Facilior tamen eſt ſimplex alicuius lentis convexæ uſus.

XXII. Difficile eſt, cum tabula mergitur in liquore, impedire omnino *oſcillationes* & Mercurii & ipſius liquoris. Duo tamen hic adminiculo eſſe poſſunt. *Primo* optarem, ut tota hæc tabula ſuſpenderetur in tubo vitreo ſatis longo & nonnihil amplo; ut deinceps ope fili, quod circa axem in ſupremitate tubi poſitum circumvolvitur, mediante manubrio rotatili & cochlea ſine fine, tubus leniter, & ſine violenta concuſſione, poſſet a-

quæ

quæ immergi ſucceſſive, aut ex eadem attolli. Ita enim fieret, ut oſcillationes eſſent breviores. *Secundo*, ſi periculum in mora non eſt, licebit expectare, dum finitæ ſint; finientur autem citius, quam in Barometris vulgaribus ſimplicibus, ob reſiſtentiam liquoris in altero crure. Si in mora periculum eſt, attendantur oſcillationes duæ pluresve, ſe invicem inſequentes, & pro altitudine vera aſſumatur medium excurſuum. Ita vel nihil vel minimum errabitur, præcipue in æſtimanda, & ad Mercurium transferenda altitudine liquoris, e. g. aquæ; fac enim in æſtimatione altitudinis aquæ aberrare te integra linea a vero, reductione abſoluta hoc ne duodecimam quidem lineæ partem faciet in æſtimatione altitudinis Mercurii.

XXIII. Si cui difficile eſt, nanciſci tubos vitreos, ſatis & longos & amplos, poteſt ille ex *quacunque* materia *vas oblongum* parare, idemque in anteriori facie tabulis vitreis claudere, ut obſervari immerſiones tubi Mercurialis valeant. Vaſculum, vel tubus amplior ſuperne infundibulo, inferne epiſtomio inſtrui poteſt, ut ſubſtituere liquorem unum alteri liceat, cum volupe fuerit. Pars autem liquoris tubulo in *d b* innatans poteſt ſiphonis ope extrahi quoties libuerit liquores immutare: Dantur enim ſiphones, etiam ſponte fluentes, quos non ingreditur Mercurius, quibus omnem aquam licet extrahere. Si & hoc difficile eſt parare vas eiusmodi, poteſt Barometrum mergi in vaſe quocunque aqua pleno; & obſervari ſubmerſionis profunditas. Obſervandum vero iſthoc in caſu ſummitatem *a* ſic aſſumendam eſſe, ne mergi illam in experimento profundius ſub aquam contingat.

XXIV.

XXIV. Ex dictis autem conficitur, *nullum* hic *incommodum* adeſſe oriundum a tubi inæqualitate, ſemper enim elevatur Mercurius ad locum præciſe eundem; *nullum* a diverſitate concavitatis & convexitatis ſupremæ ſuperficiei, in deſcenſu & aſcenſu Mercurii, ſemper enim aſcendit & ſuperficiem acquirit convexam; *nullum* ab exhalatione liquoris, ſemper enim adeſt, quantum ſufficit; *nullum* a putredine, poteſt enim liquor antiquus commutari novo; *nullum* a congelatione, poteſt enim liquor quicunque aſſumi, & illius gravitas ſpecifica ad Mercurium explorari; *nullum* a menſura diametrorum, quæ in compoſitis multum difficultatis parit, non quidem quoad calculos abſtractos, ſed quoad executionem in praxi.

XXV. Fateor enim, *menſuras* actuales ſumi circino non poſſe ſatis exacte: Si liquoribus ipſis ſumantur ita, ut obſerves, quantum aſcenſus vel deſcenſus Mercurii, in tubo ampliore per unum pollicem factus, ſpatii percurrere faciat in graciliori; pro toto illo ſpatio obtinebis exactitudinem, qualem ſupra §. 20. in examine gravitatis liquorum oſtendimus; ſed pro ſingulis tuborum partibus idem nondum obtines, niſi ſuppoſito, tubos per illud ſpatium eſſe æquabiles exacte. Sin per ſingulas altitudinum Mercurii lineas examinare loca liquoris in tubo graciliori velis, laborioſa & multiplex opera erit, & non ſemper in poteſtate poſita; neque enim altitudines omnes obtinere pro lubitu poſſumus, niſi maiores per tubi inclinationem, ſed quæ in ampliori vaſculo plurimis obnoxia eſt difficultatibus.

XXVI. Supereſt *unum*, ſed cæteris omnibus *difficilius*, momentum. Quomodo diſcernuntur effectus

caloris ab effectibus *gravitatis* Atmoſphæræ? alii generoſe negligunt hanc difficultatem, & incommoda diſſimulant: alii palliant nævum ſuperficiariis excuſandi rationibus; *ſolus*, quem ſciam, *Amontonius* ex inſtituto rem perſequitur. Liceat mihi hic eſſe prolixiori.

XXVII. Quibus Amontoniana Barometrorum *ſimplicium correctio* placet, * eandem facile ad noſtrum applicare poterunt. Curent, ut linea *c d* incidat in medium vaſculi amplioris ad recurvam tubi partem affixi; & habebunt Barometrum ſimplex ordinarium, cui omnia convenient, quæ ordinariis competunt. Neque impediet felicem ſucceſſum aquæ vel alterius liquoris adhibiti expanſio. Ex §. enim 20. ſemper erui poteſt relatio eius ad Mercurium præſentem, adeoque præſens eius altitudo vera inveniri, non ſecus, imo melius & exactius, qnam ſi illa ſimplici Barometro inveſtigata eſſet. Obtenta autem altitudine Mercurii in hac tempeſtate, per Amontonianam deinde tabulam reduci poteſt ad altitudinem Mercurii calidioris aut frigidioris, tempore conſtructionis adhibiti.

XXVIII. Viſum eſt aliquando, rem omnem facilius & *brevius* ſic inveniri poſſe. Aſſumatur ex definitione Amontoniana, ** Mercurium tranſeundo a ſummo frigore ad calorem ſummum augeri parte $\frac{1}{115}$ ſui voluminis. Patet, illum, ſi frigidiſſimus occupet ſpatium *acd*,
Tab. 15. *Fig.* 3. calidiſſimum non poſſe eodem illo contineri, ſed poſita eius

* *v. Memoir. de l'Acad. des Sciences A.* 1704. *p.* 230. *edit. Bat.* ** *v. Memoir. de l'Acad. des Sciences A.* 1704. *p.* 225.

eius ſummitate in *a* aſcenſurum tribus minimum lineis ſupra *d*. Poſſet igitur expanſio eius a calore veniens ſubinde agnoſci per altitudinem *ed* ſupra *d* aſſurgentem: eademque ad totum ſpatium *acde* comparari; idque vel ſimpliciter pro longitudine horum ſpatiorum *ed* & *acde*, ſi tubulum ſupponas ſenſibiliter, & quoad hos reſpectus æquabilem; vel ſi haſce etiam minutias reſpicere velis, operoſiori examine. Ita igitur ratio denſitatis Mercurii ab uno tempore ad aliud innoteſceret: Conſequenter præciſa gravitatis Atmoſphæræ menſura omni tempore definita foret. Haberentur enim pro omni tempore altitudines Mercurii & denſitates.

XXIX. Favet huic methodo ſententia *Amontonii*, qui monet,* ſe experimento didiciſſe, quod *tubi Barometrorum ordinarii nullam a frigore conſtrictionem*, aut a calore ampliationem ſenſibilem patiantur. Hoc enim pharmaco prioribus addito, nihil amplius ad attingendum ſcopum noſtrum deſiderari poſſe video. Solum enim hoc anxios nos habere poſſet, quod & vitrum a frigore contrahatur, & a calore expandatur, atque adeo incrementum voluminis Mercurii ſemper maius ſit in calore, quam eſt ſoliditas cava tubuli *ed* memorata. Optandum itaque foret, ut & altera hæc Viri egregii ſententia modo indicata, & prior expanſionis menſura §. 28. eſſent exploratæ.

XXX. *Fateor* autem *invitus*, me nondum omni dubio liberatum eſſe, per experimenta ll. cc. propoſita. Perſuaſum mihi eſt per experimenta thermometrorum,

* v. *Memoir. de l'Acad.* 1704. *p.* 373.

trorum, * quod a calore amplietur cavitas phialæ; ut id vulgo infertur ex deſcenſu ſubitaneo fluidi, cum thermometrum aquæ calidæ immergitur. Itaque ratum etiam erit, in experimento Amontoniano ** ſpatiolum illud, per quod Mercurius ſubſidit, non explere totam Mercurii contractionem; conſtrictus enim & tubus fuit a frigore. Maior itaque eſt expanſio & contractio Mercurii & ſpiritus vini, qam loco mox memorato definitur. Similiter itaque metuas, ne in experimento altero, quo aucta vaſis vitrei capacitas inquirebatur, expanſio liquoris contenti ſimul facta eandem exhibuerit iuſto minorem. Nolim vero id pertinaciter contendere, quoniam tota experimenti illius ratio deſcripta non eſt.

XXXI. Illud facile iudices, cum tanta huius ſententiæ Amontonianæ pro meo ſcopo utilitas eſſet, me nihil intentatum reliquiſſe, ſed omnino præoptaſſe, *ut* eandem, ſi fieri poſſet, *confirmarem*. Neque enim omnis ſtatim ſpes decollabat. Differunt phialæ pro thermometris adhibitæ a tubis Barometrorum, ſoliditate laterum, & capacitate interna plurimum. Non igitur impoſſibilem iudica-

* *v. Memoir. de l'Acad. A.* 1700. *p.* 153. *& A.* 1705. *p.* 101. *cui conf. præcipue A.* 1710. *p.* 563. *ubi recenſetur experimentum prioris converſum. Repetii utramque experimenti claſſem, occaſione dubitationis ſubortæ circa veram phænomeni cauſſam: immiſſoque alternis vicibus coram Societate noſtra in aquam fervidam & glacialem thermometro Fl rentino, factum comperi ita habere, uti traditur.*

** *v. Memoir. A.* 1704. *p.* 225.

dicabam Amontoniani huius experimenti cum thermometricis conciliationem.

XXXII. Pro hoc autem fine ſumſi *tubulos* aliquot *graciliores*, ſed *longiores*, eosdemque inflexi, uti Fig. 7. Tab. 14. videtur; eo ſaltem fine, ut longior tubus in breviori ſpatio contineretur: extremitatem unam infundibulo *ab* inſtruxi, alteram diduxi in tubulum capillarem *cd*. Infundibulo ſufficientem Mercurii quantitatem ſimul infudi; ut, cum ſemel inciperet fluere, nullus ſe aer immiſcere poſſet. Quoniam cedere aer per tubuli capillaris orificium poterat, momento temporis implebatur tubulus, & effluebat ex tubulo capillari; donec in crure altiore *be* eſſet ad libellam: Tum vero ope lampadis obſignabatur hermetice tubus capillaris, ſic, ut non plus aeris remaneret, quam ut id acutiſſimo viſu vix agnoſci poſſet. Inſtrumentum ita paratum *alternis vicibus* aquæ *fervidæ* & *glaciali* coram Societate noſtra immerſi, ſed nullum in frigida aſcenſum ſubitaneum, aut in fervida deſcenſum Mercurii licuit diſtinguere. Examinavi vero tubulum, an ullibi bullula aeris aut particula ſolum eius intercepta ſeſe dilataret in fervida; neque id obſervare potui. Sicui deſit facultas acquirendi ſibi aut efficiendi tubulum cum infundibulo; itemque hermetice, & ſatis caute obſignandi tubulum capillarem: poteſt is glutine adhibito ſatis exacte tubum claudere, poſtquam eum ſuctione (quod ſemper facile, & in tubis amplioribus fere neceſſarium eſt) implevit. *Tab.* 14. *Fig.* 7.

XXXIII. Patet igitur, adhiberi methodum poſſe, quam §. 28. deſcripſimus, non ſine fructu. *Non* tamen hæc *ſola* eſt. Suppetit & alia, quam eo fine de-

ſcribam, ut conferri invicem utraque, &, quænam melior ſit, ex *praxi* ipſa poſſit definiri. *Duo* autem ſunt, quæ hic requiro; *Primo* neceſſum eſt, ut dato quocunque tempore queas definire altitudinem Mercurii ſupra libellam. Id ope liquoris fieri exacte ſic poteſt.

Tab. 15. *Fig.* 4. XXXIV. Merge Barometrum, donec Mercurius attingat lineam *a* & nota altitudinem liquoris ſupra lineam *cd* in ſcala diviſionum appoſita. §. 17. Si hoc in caſu Mercurius ſupra lineam *cd* elevatus eſt, merge amplius; ſi depreſſus infra *cd* extrahe tubum, donec Mercurius perfecte reſpondeat lineæ *cd.* Examina, quid ſingulæ hæ altitudines (pro gravitate liquoris ſpecifica, per §. 20. definita) faciant reductæ ad altitudines Mercurii. Tum vero, pro obtinenda vera ad hoc tempus altitudine Mercurii ſupra libellam in altero tubo deme in priori caſu, in poſteriori adde altitudinem ultimam ad primam. Negligo hic altitudinem liquoris *ed* ut contemtibilem: ſi nolis, facile eſt illam ſimul conſiderare; ſufficit enim ſumi illam, cum ad liquorem pertinet, ſimplici oculorum iudicio.

XXXV. Ita primum obtinemus. *Secundum* poſtulat, ut denſitatem quoque Mercurii præſentem pernoſcas. Perge igitur hoc ordine: Si aqua vel liquor adhibitus quicunque eandem ſemper denſitatem ſervaret, poſſet ope §. 20. inquiri denſitas Mercurii præſens ad præteritam. Cum id de nullo adhuc liquore cognitum ſit, methodo illa §. 20. hoc ſolum intelligitur, quæ ſit unoquoque tempore Mercurii & liquoris mutua denſitas. Pro ſcopo autem præſenti requiritur adhuc aliquid amplius. Quodnam illud? dicis; nimirum hoc, ut denſitas alterutrius

utrius

utrius ſub diverſis temporibus ſpectati poſſit invicem conferri. Ita enim, ſi denſitatem Mercurii calidi poſſis cum denſitatate aquæ eiusdem temporis calidæ; denſitatem aquæ calidæ cum denſitate frigidæ; denſitatem aquæ frigidæ cum Mercurio eiusdem temporis frigido exacte comparare: poteris quoque denſitatem Mercurii uno tempore calidi cum denſitate eiusdem alio tempore frigidi conferre eadem exactitudine.

XXXVI. Primum & tertium poſſumus ope §. 20. Quæritur adhuc ſecundum. Atque ita reducitur omnis tandem difficultas ad hoc, ut *denſitatem aquæ* diverſis temporibus variam poſſis invicem *conferre.* Hoc diu & a pluribus & diverſimode ſolutum eſt problema. Placet ex illis hanc ſeligere methodum, qua *corpus ſolidum*, v. g. metallicum, in utraque aqua ſolicite ponderatur, & ex amiſſo pondere iudicatur fluidi denſitas. Pondus illud ne & ipſum contrahi frigore, & calore expandi obiicias, poteſt aſſumi in ſtatu medio, quo calorem v. g. manus ordinarium neque multum excedit, neq; ab illo multum deficit.

XXXVII. Atque ita tandem effectum puto, ut *problema* in ſeſe *difficillimum*, adhibitis operationibus quidem pluribus, (tribus ſcil.) ſed facilibus, reduxerim *ad problema* ab omnibus *facile* ſemper habitum. Poſtulo etiam hac de cauſa, ut, ſi *Areometra* dari conceduntPhyſici, concedant quoque hanc meam machinam, ſeparato a gravitate caloris effectu, eſſe non Baroſcopium modo, ſed *Barometrum*, quo non diſcernere ſolum variationes gravitatis in Atmoſphæra liceat, ſed etiam *metiri.*

XXXVIII. Unicum illud addo, ſi quis non ſummam quærat exactitudinem, *poſſe* illi *ſufficere* dicta §. 28.

vel

vel etiam, adhibito pro liquore altero, oleo Tartari per deliquium, cuius non magna dicitur eſſe rarefactio*, poſſe negligi operationem §. 35. Error enim a calore oriundus, uti facile calculus docet, præmiſſa ſolum operatione §. 20. parum erit ſenſibilis. Quin imo, ſi liquor fuerit valde obnoxius expanſioni, ut v. g. Spiritus vini, tum etiam neglecta cautela §. 20. adhibita ſola operatione §. 34. error a calore & frigore minor erit, quam in Barometris ſimplicibus. *Prout* igitur *ad maiorem* ſpectator *exactitudinem* adſpirat, ita pluribus cautelis adhibitis ad eandem poteſt pertingere.

XXXIX. *Quotidianus* vero Barometri uſus poteſt etiam hoc artificiolo reddi commodior; ſi ex altero latere quidem a linea horizontali *cd* numerentur lineæ & digiti incipiendo ab unitate. Ex altero autem ita, ut adſcribantur pollices altitudinis Mercurii ab Atmoſphæra ſuſpenſi ad ea loca, in quibus aqua ſupra tubum conſiſtet, atque intermedium ſpatium deinceps in 12. partes maiores dividatur, quarum ſingulæ lineis Mercurii reſpondeant, iterumque in 12. partes diviſæ duodecimas linearum indicent. Sufficient hæc, ubi ad calorem attendere non oportet; cum autem hoc fieri utile eſt, non gravaberis diligentiam adhibere maiorem, ſequendo §§. 33. 34. 35.

XL. Non ſuccurrunt nunc animo difficultates aliæ, ad quas in ſuperioribus nondum attenderim, niſi hæc una, *an* hoc *Barometrum ſit* etiam *portatile*? Eſt vero, ſi velis. Non ſolent obambulare Barometra quotidie; igitur

* *v. Memoir. de l'Acad.* 1704. *p.* 369.

tur Barometrum portatile dicitur, quod data occaſione poſſit ex loco uno in alium deferri ſine detrimento. Simplicia habentur pro portatilibus, præcipue, ſi recurva ſunt. Extrahe noſtrum ex liquore ſuo, & inverte, habebis Barometrum ſimplex recurvum. Si metuas, ne aqua, quæ in vaſculo ampliori ſtagnaverat, in alteram tubi partem intret (etſi hic metus præcaveri poſſit, ſi tubus ſit anguſtior, & Mercurii ea copia, ut nequeat omnis intrare in crus longius) potes per §. 23. aquam prius extrahere ope ſiphonis recurvi capillaris.

XLI. Commodius hoc eſt: relinque tubum Mercurialem cum tabula ſua in altero ampliori, ſi vaſculum inferius ſit ita amplum, ut Mercurius a ſuccuſſione latoris oſcillans in deſcenſu non effluat, & tubus a vaſculo ad inflexionem ita longus, ut, ſi Mercurius ad ſummitatem aſcendat, non tamen recedat ad usque inflexionem tubi. Hoc modo potes *erectum* transportare Barometrum.

XLII. Si *inverſum* aut *inclinatum* transferre ideo malis, ne a ſuccuſſionibus Mercurii aſcendentis frangatur tubi ſummitas; cura, ut tubus inferne bis inflexus ſit, & Mercurius, cum ad ſummitatem aſcendit, non ultra crus primum recedat. Fieri hæc omnia facile poſſunt.

XLIII. Illud pro difficultate non reputo, ſi quæras, quomodo ſuſpendi debeat tabula, ut *crus* Barometri *longius* ſit *perpendiculare*? Cura, ut linea ſuſpenſionis tranſeat per centrum gravitatis tabulæ & tubi commune illud, quod obtinet cum tabula eſt ad dimidium ſui merſa. Differentias enim illius centri, ob inæqualitatem laterum tubi, pro maiori aut minori eius immerſione variantis facile

negliges ſine incommodo. Sin omnem velis ſcrupulum evitare, affige pendulum tabulæ, atque ſic ad parietem firma machinam, ut id deſignet lineam axi Mercurialis tubuli parallelam; talem enim antea deſcribes. Atque iſta hucusque de ſtructura novi noſtri Barometri dicta ſunto: quibus unum illud epimetri loco ſubiungam.

XLIV. Si non requiras, ut calorem a gravitate diſcernat Barometrum, ſed tamen vulgari & ſimplici ſenſibilius evadat, careatque nonnullis Barometri ſimplicis defectibus, (vid. §. 12. n. 1. 2.) & ſtructuræ ſit non difficilis: poteſt ita ſatisfieri petito Tuo. Sint duæ tabulæ ad angulum rectum iunctæ, ſic tamen, ut altera maneat fixa, altera circa axem rotari, & rotando radere priorem poſſit. Tabulæ rotatili affigatur Barometrum ſimplex, ſed ordinario longe maius, ſuperne ſi placet ſphærula inſtructum, ſed tubi tamen ſtrictioris. In eo tubo aſſumatur punctum aliquod v. g. in altitudine quatuor pedum ab inferiore bullula Mercurio plena: in maiore, aut minore, prout Barometrum ſenſibilius deſideratur aut minus ſenſibile. Tum vero inclinetur tabula mobilis cum affixo ſibi Barometro, donec Mercurius attingat punctum memoratum; & obſervetur magnitudo anguli comprehenſi inter ſitum tubi inclinatum & horizontem. Si enim hic maior eſt, Atmoſphæræ maior gravitas eſt pro ratione ſinuum anguli inclinationis. Non igitur difficile erit, conſtruere ſcalam ſuper tabula immobili, quæ exhibeat altitudinem Mercurii in menſuris uſitatis. Ita novam obtinemus Barometri ſtructuram, quam tamen ſuperiori poſtponendam eſſe putamus.

Uſus

Uſus Barometrorum ſensibiliorum.

XLV. Sufficiant illa tandem : Dicamus nunc, *cui uſui*? Facilis ſubinde quæſtio, nec æque facilis ſemper reſponſio ! Hoc loco attendimus vel ad uſus Barometrorum omnium ſenſibiliorum vel ad noſtrum ſingulariter. Certum eſt, plures de machinis ſolicitos fuiſſe, quam de uſibus earum. Igitur non ineptum puto, id problematis loco proponere Eruditis, ut indicent, *quibus* potiſſimum *utilitatibus Phyſicis*, adhiberi exactior variationum gravitatis cognitio poſſit?

XLVI. Mea, ſalvis melioribus, hæc fere ſententia eſt: etſi Barometra proprie dicant ſolum, non prædicant; huc usque tamen ad prædicendas tempeſtates adhiberi præcipue conſueverant. Cum ſæpe fallerent divinationes, accuſari contigit machinas; non ſecus atque ſenſus accuſari ſolent, cum præcipitata fallunt de ſenſibus iudicia. Igitur emendationes quæſitæ ſunt; atqui non dantur aliæ, niſi ut ſenſibiliores fiant mutationes, & ab irregularitate caloris atque frigoris liberentur. Id quidem bene ſe habet, ſed ad *præcognoſcendas* tempeſtates *nihil* confert. Obſervamus, ne quidem ad illas Mercurii variationes, quæ in ſimplici Barometro facile diſcernuntur, conſequi ſemper ſenſibiles tempeſtatum differentias; igitur neque ex minoribus adhuc variationibus prædici illæ probabiliter poſſunt. Ad hunc igitur finem immediate nondum adhiberi poſſe Barometra illa ſenſibiliora exiſtimo.

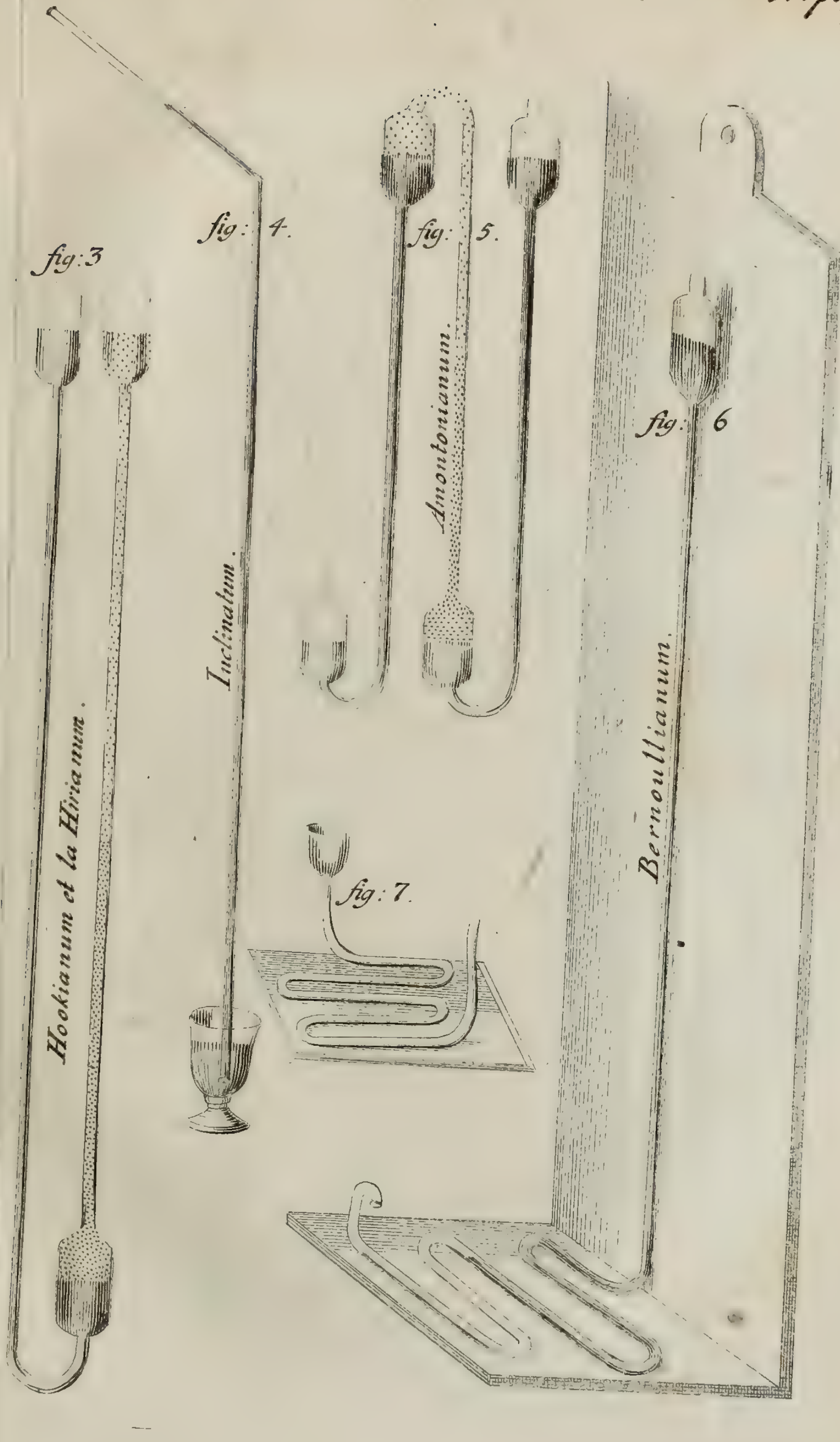
XLVII. Fortaſſis tamen id *mediate* fieri aliquando poſſet, ſi quis detegeret artificium ex variatione

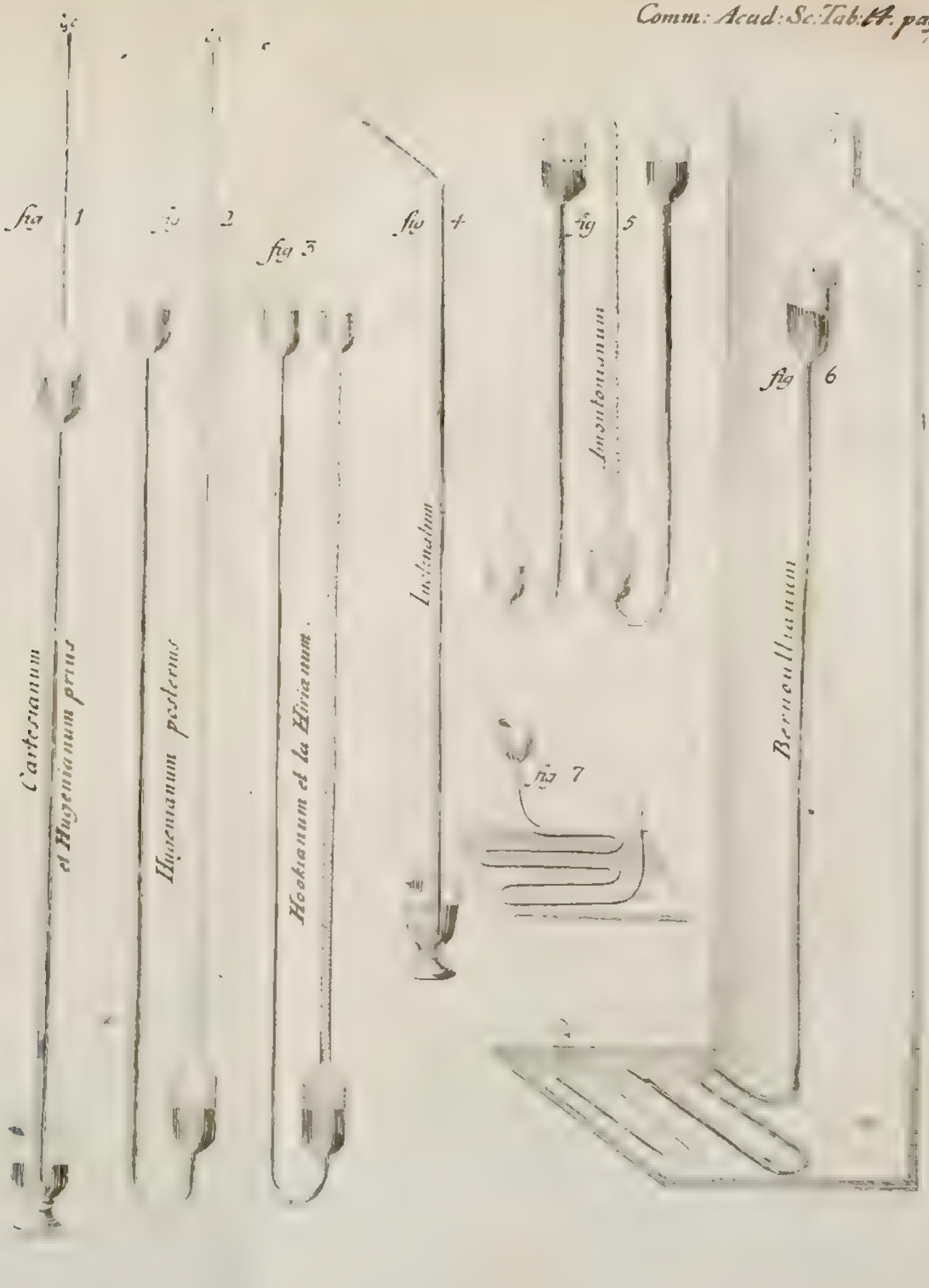
gravitatis eruendi *ventorum ſucceſſiones*, ab hiſce enim plurima pendet tempeſtatum varietas. Sed vero ventorum ortus & effectus mage ſunt compoſiti, quam ut ex ſola Atmoſphæræ gravitate hauriri earum cognitio poſſit. Dubium etiam eſt, an ex cognito per complura inſtrumenta, reliquas aeris proprietates indicantia, ſtatu Atmoſphæræ noſtro, probabilis de vento aut ſtatu Atmoſphæræ futuro coniectura fieri poſſit?

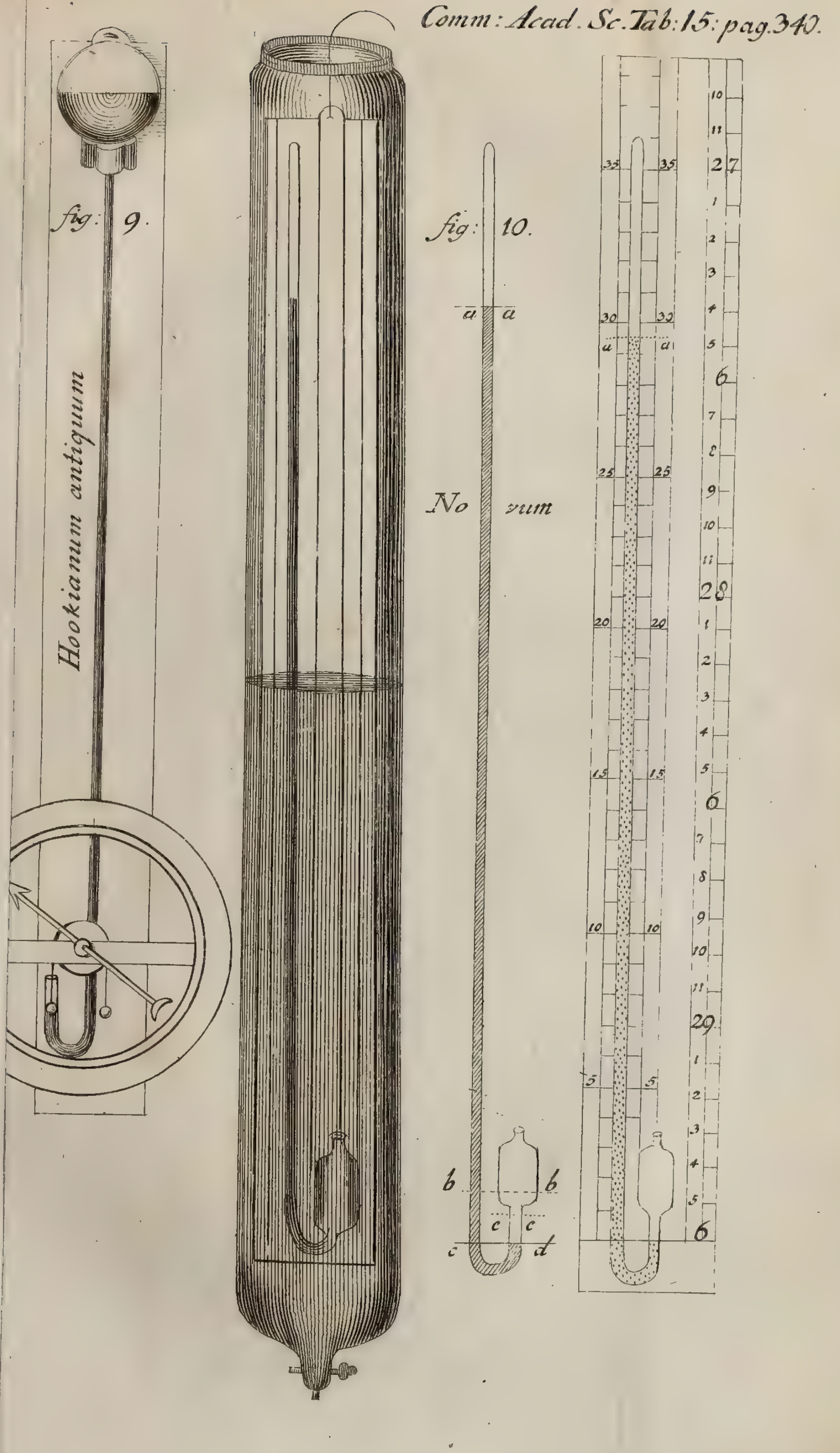
XLVII. Hactenus igitur illum placet uſum aſſignare, ut ope ſenſibilioris Barometri accuratior *ſcala variationis* pro maiori minorive *montis*, & *metalli fodinæ* altitudine & profunditate habeatur, eo conſilio, ut inquiratur, an fortaſſe aſſumtis hiſce differentiis, obſervatione cognitis, tanquam elementis alicuius loci geometrici posſit regula aliqua inveniri pro altitudinibus quoque maioribus, quam per experimenta poſſunt indagari? Pro hoc fine neceſſariæ ſunt obſervationes eorum, quibus non deeſt *commoditas locorum*, iuga montium & fodinarum profunda. Curandum vero; ut altitudines & profunditates illæ explorentur menſura actuali per partes, non calculo ex angulis (præter unam ſtationem menſuratam) ſolis facto: Videndum quoque, ne in circulum incidamus vitioſum. Cum enim ob fallacias viſus in iudicandis altitudinibus, oriundas ex radiorum refractionibus, aliquando Barometra ad metiendas montium altitudines adhibeantur, manifeſtum eſt, altitudines hoc modo cognitas noſtro ſcopo minime conducere.

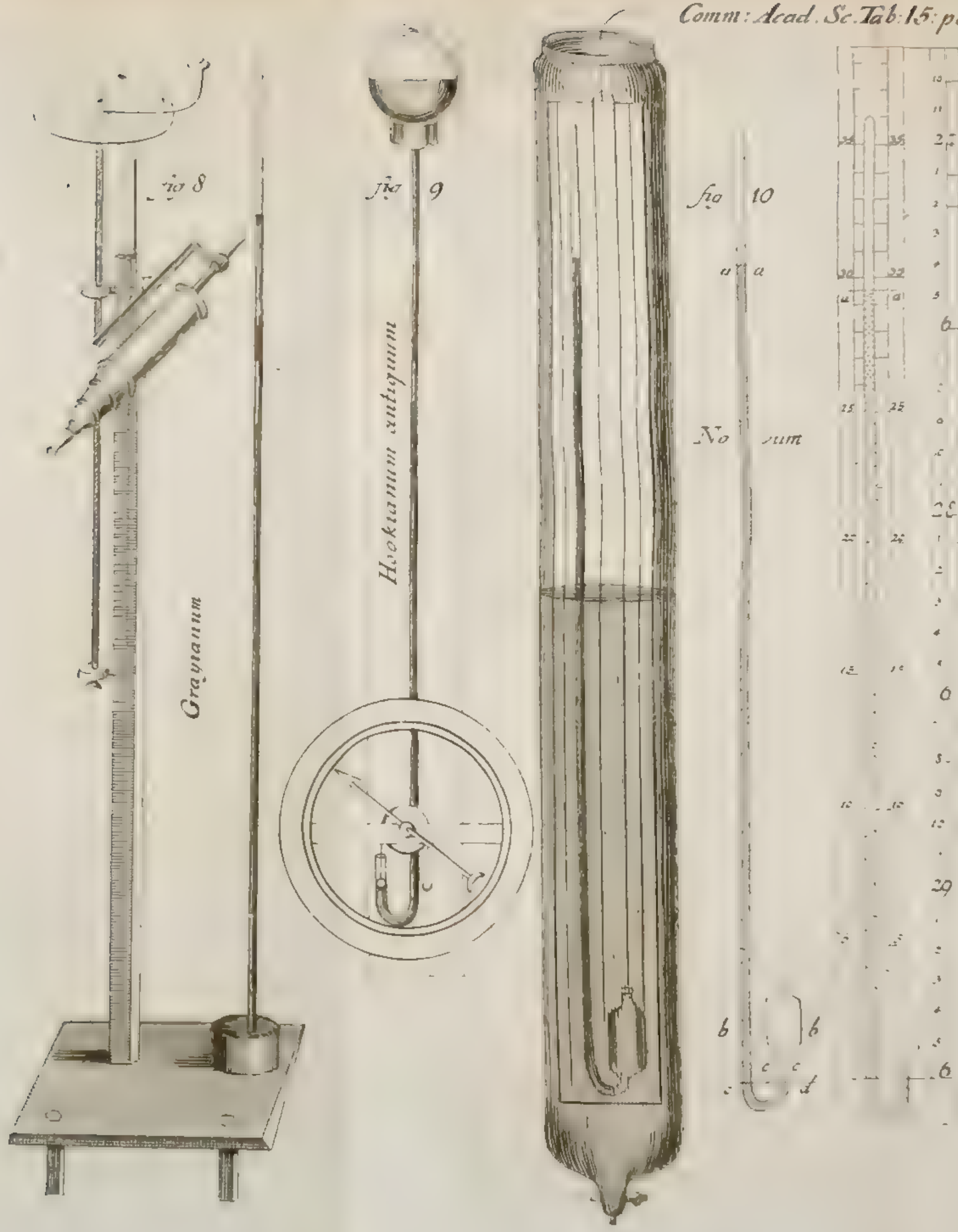
XLVIII. Poſſet etiam *ſuſpicio* moveri, annon radii luminis per Atmoſphæram tranſeuntes maiorem minoremve refractionem patiantur, ſub diverſo gravitatis

ſtatu?


fig: 3
fig: 4.
fig: 5.
fig: 6
fig: 7.
Hookianum et la Hirianum.
Inclinatum.
Amontonianum.
Bernoullianum.


fig 1
fig 2
fig 3
fig 4
fig 5
fig 6
fig 7
Cartesianum
et Hugenianum prius
Hugenianum posterius
Hookianum et la Hirianum.
Amontonianum
Bernoullianum


fig: 9.
Hookianum antiquum
fig: 10.
a a
Novum
b b
c c
c d
35 35
30 30
a a
25 25
20 20
15 15
10 10
5 5
27
6
28
6
29
6


fig 8
Grayanum
fig 9
Hookianum antiquum
fig 10
Novum
a
b
c
d

ſtatu? Gravior enim eſt aer, vel ob auctam altitudinem vel denſitatem; utraque variat refractionum quantitates, altera ob refracti radii longiorem viam, altera ob maiorem refractionis angulum. Quæritur itaque: an illa, ſi quæ eſt, refractionis variatio a diverſa Atmoſphæræ gravitate veniens, obſervationibus & experimentis ſolicite inſtitutis ſit *ſenſibilis*? & alicuius *in Aſtronomia* momenti?

XLIX. Ad cognoſcendam naturæ conſuetudinem in tranſitu ab uno gradu gravitatis ad alium; ad obſervandas varietates gravitatis a vento pendentes; quin etiam a nube una vel pluribus ad horizontem vel verticem poſitis, uſurpari utiliter & cum fructu poſſet *novi generis* Baroſcopium *Caswellianum*, * cæteris omnibus ſenſibilius & præſtantius, ſi in illo liceret caloris atque frigoris effectus vel evitare, vel diſcernere. Id igitur ſi quis poſſit, rem præſtiterit omni laude digniſſimam.

L. De *noſtra* Barometri correctione illud ſpeciatim dicere licet, poſſe illud inſervire pro cognoſcendis eodem tempore diverſorum liquorum gravitatibus ſpecificis; pro indaganda veritate ſententiæ Amontonianæ §. 29. memoratæ; pro definienda contractionis tuborum, ſi quæ eſt, menſura, ut, quamnam illa proportionem ſequatur, intelligas &c. de quibus, ſi quid utile cognovero, ſuo tempore dicendi locus non deerit.

* *v. Transact. Abrig'd by Henry Iones Vol. IV. P. II. p* 6. – 10. *ex Trans. n.* 290. *Prolixior ſtructura & demonſtratio eſt, quam ut hic deſcribi poſſit. Itaque unum hoc agimus, ut eandem attentioni Lectorum de meliori commendemus.*

CATOPARDI PHOCAE & ELEPHANTI* CISTERNA & CANALIS THORACICVS

primum detectus

a Io. Georgio Du Vernoi.

M. Sept. 1726.

CAnis, equus, lupus, leo, lynx, felis odorata & non odorata, cuniculus, porcus, erinaceus, vitulus adeoque undecim ſolummodo animantium genera eo cum ſucceſſu inciſa ſunt, ut viarum chyliferarum conſpectus in iis aliquando oblatus ſit. Ex hiſce vero non omnes, ſed paucæ ſolummodo delineatæ; aliæ neglectæ uti ex hiſtoria animalium abunde patet. Propterea differentiæ viarum chyliferarum in variis animantium ſpeciebus notitiam perexiguam nos tenere fatendum eſt. Nemo interea ſcire poteſt, in quibusnam ſpeciebus canalis thoracicus latus dextrum potius quam ſiniſtrum vel utrumque ſimul occupet? Num eius inſertio contraria ſit? Num chylus alia via quam per thoracem in ſanguinem perveniat, & quæ forte aliæ ſunt innumeræ proprietates circa huncce chyli tranſitum obſervandæ oculove minus indifferenti conſiderandæ. Itaque quum in Elephanto chylus haud diverſa ratione quam in pennatorum genere ſine ope ductus thoracici ad maſſam ſanguineam contendit; quum in Phoca canalis thoracicus ſub forma arcus offertur; quum denique ſingularem in Catopardo huius con-

* *Anno* 1727. *demum inſtituta fuit Anatome Elephanti, cuius ductus thoracicus aptiorem hic locum obtinere viſus eſt.*

conformationem deprehendimus:magna ſane ſuſpicio eſt,in cæteris quoque animantibus magnum circa vias chyliferas diſcrimen a conditore animantium conſtitutum eſſe.

Quælibet animantia, quæ tantum non ſubtilitate ſua viſus aciem effugiunt, quocunque morbo ac tempore defuncta ad hancce disquiſitionem adhibere licet, ſicuti tribus hiſce exemplis comprobavimus.

Prima diſſectio fuit cuiusdam feræ in vivario SVAE IMP. MAI. defunctæ, a Pariſienſibus *Chatpard*. vocatæ; vid. *Memoires pour ſervir a l'hiſtoire des Animaux*. Raio *Catuspardus* ſeu *Catus montanus Americanor. Synops. animal. quadrup. pag.* 169. In hacce diſſectione præter vias chyliferas quædam ſponte oblata ſunt, quæ ad perficiendam magis ornandamve huius quadrupedis hiſtoriam, adeoque pro ſupplemento ad laudatam Pariſienſium deſcriptionem conferre viſa ſunt.

Effigiem felinam aut lynceam, caput rotundum, roſtrum breve, auriculas felinas, duos prælongos dentes caninos in utraque mandibula, ſex inciſores qui in ſuperiore maxilla craſſiores ſunt, totidem molares in inferiore & octo in ſuperiore, quorum duo utrinque poſiti vix apparent, digitos denique in ſingulis pedibus quaternos unguibus cinereo aduncis inſtructos obtinet, magnitudine lyncem aut vulpeculam æquans. Quem menſi ſunt Pariſienſes, uno pollice altitudinis & dimidio pede longitudinis noſtro cedit. Cauda felinæ ſimilis eſt, cum unius pedis longitudine & trium pollicum peripheria. Pellis maculoſa eſt & tricolor ex pilis flaveſcentibus nigris & albis, non aſperis neque longis, picturam mixturamve macularum admirabilem efficientibus. Dorſi maculæ nigræ & flaveſcentes,

tes, ad ventris latera albæ & flavæ , in ventre partim flavæ & nigreſcentes, quales etiam in pedibus conſpicuæ ſunt. Figura macularum veluti in Tigride oblonga ſeu virgata, quo charactere hæc fera æque ac Tigris a Pantheris differt. In medio dorſi macula una præ aliis notabilior eſt inſtar faſciæ in longum protenſa , quædam minus longæ ſunt uti in ventris lateribus aliæ minores & breviores, figuræ ovalis, maculis prioribus incluſæ , quatuor in cervice , quarum duæ mediæ ſerpentum inſtar flexuoſæ prope occiput ad invicem inclinatæ mox in duo cornua figuræ V terminantur duæ aliæ exteriores pariter flexuoſæ , poſterius ad radicem auricularum terminantur : eo loco quo deſinunt, duæ tenues faſciolæ inter duas auriculas usque ad palpebræ ſuperioris medium protenduntur relicto vacuo ſeu area in vertice plurimis punctis nigricantibus ſeu maculis conſperſa. Prope angulum oculi exteriorem, duæ utrinque faſciæ incipiunt, per medium genæ oblique ſub auribus deſcendentes invicemque coeuntes. Cauda maculoſa ex annulis imperfectis exteriore ſeu ſuperiore parte flavis nigrisve, inferiore vero canis nigrisve pilis ornata. Denique notandum eſt, non ſolum myſtaci ſed etiam ſuperciliis genisve infixas eſſe ſetas partim albas partim nigras easque valde rigidas , pellemque fortem exſpirare odorem.

Non licuit in noſtro ſimilem imperfectionem ſeu defectum deprehendere, qui in Catopardo Pariſienſibus ſecto conſpicuus erat, quique variis præbuit anſam ratiociniis puta utriusque teſticuli & vaſorum præparantium deferentiumve defectum absque ullo apparente caſtrationis ſigno

gno. Excepto thymo, qui in utroque deficere viſus eſt, nec non veſiculis ſpermaticis glandulisque ſublingualibus, omnium partium apparatu bene inſtructus erat. Præter penem vagina ſua incluſum ſed admodum gracilem, teſticulos duos burſa continebat avellanam æquantes, una cum paraſtatis, ductibus deferentibus in proſtatæ corpus deſinentibus arteriisq; & venis ſpermaticis, quæ propter ſuam exilitatem ægre inveniri poſſunt. Quod reliquas partes attinet, nimirum oſſa, muſculos, caput, pectus cum incluſis viſceribus, ea fere eadem ſunt cum iis, quæ partim in laudata deſcriptione, partim in deſcriptionibus hyænæ odoriferæ ſeu cati zybethici * iam tradita ſunt. De exquiſito huius animalis odoratu ſuſpicionem facit, ampla turbinatorum oſſium oſſisque cribroſi ſuperficies, item ſinuum frontalium numerus auctus. De acie viſus, punctum nigricans in fundo choroidis, quod in lynce pariter obſervatum eſt, nec non undecim muſculi oculum moventes, una cum magnitudine glandulæ lachrymalis. De voracitate & cita diſſolutione ciborum teſtantur dentes, lingua valde aſpera & quaſi ſpinoſa, aculeis verſus gulam inclinatis, glandula magna ſalivalis muſculo oculi deprimenti adeoque orbitæ adhærens, cum ductu excretorio iuxta ultimum dentem molarem hiante, item duæ aliæ glandulæ conglomeratæ in cœlo palati conſpicuæ, quæ glandularum ſublingualium officio defunguntur, ventriculi pinguedo, craſſities nec non foramina variæ magnitudinis, quorum nonnulla granum hordei facile, alia vix ſetam admittunt, qualia in

* *item Leonis, cuius diſſectio his ſub prælo ſudantibus adminiſtratur.*

principio duodeni ſimul conſpeximus. Denique pancreatis amplitudo hepatisque ſeu potius vaſorum bilariorum ſingularis fabrica ſilentio minus prætermittenda eſt: Nam præter ſuperficiem hepatis plurimis punctis ſeu maculis albicantibus reſperſam, id notatu dignum viſum eſt, quod ſinguli ductus hepatici in unum ductum haud confluunt, ſed diſtinctis orificiis ductui cyſtico inoſculantur, ſpecie ductuum hepatico-cyſticorum. Ductus pancreatici & cholidochi ingreſſus communis in duodeni cavitatem quatuor digitis infra pylorum, in quo loco tunica inteſtini in tumorem oblongo-rotundum elevata eſt, ſub qua ſpecies receptaculi in conſpectum venit, in quo bilis & ſuccus pancreaticus invicem permiſceri videntur, antequam in cavum inteſtini effluant. Veſicula ipſa bilaria ſic conformata eſt, ut duobus ſepimentis horizontalibus, certa diſtantia remotis ac in medio foramine pertuſis, in duas veluti cameras diſtincta ſit. Poſtremo Lienis 8. transverſos digitos longi ſitus admodum curioſus viſus eſt: Nam in medio ventris ſub umbilico quaſi fluctuat, ſicuti omento ablato, quo inſtar panni omnia inteſtina obvolvuntur, luculenter conſpeximus.

Tab. 11. *Fig.* 2. Hiſce præmiſſis Pecquetiani receptaculi & canalis thoracici, prout in hac rariſſima fera hæ viæ nobis oblatæ ſunt, deſcriptio accurata ſuppeditanda eſt. Tum vaſa lymphatica ex imo ventre utrinque aſcendentia *aa*, tum tria 4ve vaſa lactea meſenterii *bb* in faſciculum collecta, ex Aſellii pancreate ſub arteria meſenterii ſuperiore incedentia, primo in conſpectum veniunt iisque ciſterna continuata eſt. Ciſterna ipſa *c* veſicula ſimplex, parva, oblonga, transparens, digiti minimi apicem vix admittens, cuius ſitus

ſitus ordinarius eſt , factoque 9. linearum itinere ductus thoracici formam aſſumens : Pulchrior ac ornatior tum fabrica tum ſitu tum inſertione minus ordinaria canalis thoracicus *ddd* viſus eſt. Triquetram laternam referens ex tribus tubulis in medio diſtantibus ac denuo infra & ſupra coeuntibus conſtat, hæcque conformatio tribus in locis *eee* perſpicue apparet. Duo hinc efformantur canales *ff* diverſæ capacitatis diſtantia aliquot linearum ſeparati, qui non ſuper dorſi ſpinam iuxta venam ſine pari, ſed iuxta latus ſiniſtrum aortæ ſuper radices coſtarum usque ad cordis baſin incedunt. Eodem tempore arteriæ intercoſtales modo ſub illis modo ſuper illos decurrere obſervantur. Porro duo prædicti canales tandem coeunt, ſicque unus efficitur ductus ſtraminis craſſitie, prope arcum aortæ incipiens, & iugulum verſus ſub carotide ſiniſtra ad venam iugularem contendens *g*. Equidem quum in animantibus hactenus notis canalis thoracicus haud ſupra altitudinem vaſorum axillarium aut ſubclaviorum aſcendat , Catopardo paucisque aliis id proprium eſt ut ultra memorata vaſa ſubclavia notabiliter excurrat, (huicce vero animantium generi claviculæ conceſſæ ſunt) maioremque adeo longitudinem acquirat , quippe ad medium fere cervicis perveniens, facta levi inclinatione in venam iugularem internam ſiniſtram deſinit.

Phoca.

Phoca incola eſt Maris Balthici & Newæ fluminis isque in omnibus piſcinis Petropolitanis ad curioſitatem alligatus venalis proſtat. Exemplo itaque Eruditorum ma-

ris Balthici Academiæque Pariſinæ in hac quoque urbe Imperiali vitulus marinus nuper diſſectus eſt. Inſtituti autem ratio poſtulat, ut de viis chyliferis a nobis primum detectis ſolummodo idque quam breviſſime agamus, quumque primum amphibium ſit in quo receptaculi ductusque *Pecqueti* demonſtratio facta eſt, nihil obſtare videtur, quo minus in aliis huius ſpeciei animantibus tam minoribus quam maioribus, uti ſunt equus marinus, rana, lutra, caſtor &c. easdem vias exiſtere dicamus.

Tab. 11. *Fig.* 3.

1. Obſervari meretur inferiorum partium lymphatica ad ciſternam contendentia vix ultra pelvim aſcendere, quia ſitus ciſternæ talis eſt, ut proxime ad pelvis confinia ortum ſuum habeat. 2. Ciſterna *a* omni artificio vacua eſt, ampullam valde amplam oblongamve ſimulque pellucidam ſeu hydatiformem referens. 3. Non diſpar habitudo canalis huic continuati *bbb*, ſiquidem magna ſimplicitate, unaque bifurcatione in principio, altera prope extremitatem, cum duplici ramo ad venam axillarem contendente præditus eſt. Eius porro notabilis amplitudo excedens proportionem corporis; Arcus denique quem efformat, cuiusmodi exemplum antea nunquam viſum eſt, ſingulari attentione digna ſunt.

Elephantus.

Inter omnia Animantia terreſtria Elephantus ob ſummum eius pretium molemque corporis maximam cultro anatomico digniſſimum aptiſſimumque cenſendum eſt. Quis vero non putet ſibi facile eſſe, absque cognitione inventorum *Aſellii & Pecqueti*, clauſis fere oculis, vias chyliferas in tam vaſto corpore invenire? niſi diſſectiones

trium

trium quatuorve Elephantorum a *Pecqueti* temporibus inſtitutæ contrarium edocerent. Cauſa nulla alia eſſe poteſt quam 1. quia ad canalis thoracici præparationem neceſſaria eſt talis reſolutio, ut Proſector non manibus ſolummodo, ſed pedibus & toto ſuo corpore intra ipſum corpus Elephanti ſeſe demittat in eoque ceu carcere aut ventre balænæ per aliquot horarum ſpatium perduret. Atqui ſub talibus conditionibus vias chyliferas videre nemo cupit. Altera cauſa eſt quod Proſectores Elephantorum, eos viis prædictis penitus deſtitutos eſſe fortaſſis credant; Equidem aliquam rationem ſeu fundamentum huicce opinioni ineſſe fatendum eſt: Nam diſtinguere inter vias Aſellianas & Pecquetianas omnino neceſſe nobis videtur: Etſi incredibile & conceptu arduum ſit Animantia dari ductum habentia thoracicum ſed vaſis lacteis deſtituta, id tamen certo certiſſime affirmare poſſumus quacunque arte diligentia & præparatione adhibita, ea per integrum octiduum fruſtra quæſita fuiſſe. Si quis de noſtra diligentia potius quam de naturæ defectu dubitet obiiciens, vaſa lactea non tam defuiſſe quam latuiſſe, is conſideret nihil fuiſſe quod eorum conſpectum difficilem nobis reddere poſſet: Non earum parvitas, ſiquidem in Cuniculis & Erinaceis Elephanto millies magnitudine inferioribus ea conſpicua ſunt: Non pinguedo neque concidentia: Talia enim obſtacula non amplius hodie curamus. Verum enimvero, ut minor hallucinationis ſuſpicio ſuperſit, illud etiam probe attendendum eſt, in toto meſenterio quod admodum amplum & vaſtum erat, non ſolum vaſa lactea ſed etiam glandu-

las meſaraicas, lacteorum perpetuas in aliis animantibus comites ita defuiſſe, ut ne veſtigium earum appareret.

Tab. 11. *Fig.* 4. Unius hac vice canalis thoracici eique appenſorum lymphæ ductuum carotidem hominis fere æquantium exiſtentiam certo ſtatuere poſſumus: Nam quod receptaculum attinet, ambiguum eſt quid proprie hocce nomine appellari debeat, ſiquidem eo in loco ubi ordinario ciſterna adeſſe ſolet, nihil præter quatuor canales *aaaa* ductui thoracico appenſos invenire & obſervare licet. Prædictis ductibus canalis thoracicus *bbbb* ſimplex ſed magnitudine ſua Elephanto reſpondens continuatus eſt. Is ductu ſimplici absque diviſione & bifurcationibus magnamque rectitudinem obſervans, ſuper ſpinam dorſalem vena ſine pari & aorta ſtipatus incedit. Poſtquam ad 3. dorſi vertebram pervenit, notabilem dilatationem *c* duos pollices longam in eo obſervavimus, cuius cauſa proinde ſeu naturalis ſit ſive præternaturalis incerta eſt. Canalis porrò in eo loco paulisper a ſpina dorſi recedens obliquo inceſſu ſummum thoracis iugulumve petit, tandemque in latere colli ſiniſtro duos in ramos *dd* breves diſpeſcitur, qui ad venæ iugularis cum axillari confluxum deſinere viſi ſunt. Tractus itaque ſeu longitudo canalis thoracici fere 4. ped. diameter 4. lin. æquat. Poſtremo haud prætermittendum eſt in toto eius tractu nullas nobis valvulas oblatas fuiſſe, etſi amplitudo canalis tanta fuerit, ut digitum minorem facile admitteret. Vice verſa ſubſtantia ductus poſt detractam pinguedinem eam craſſitiem obtinebat, quæ ordinario in vena iugulari hominis obſervari ſolet.

DE

DE LVCE BOREALI.

Autore

Fr. Chr. Maiero.

I.

CUm in borealibus noſtris oris apparitio lu- *M. Oct.*
cis huius tam frequens ſit, ut & vulgus eam *1726.*
non admiretur amplius, facile mihi fuit intra breve temporis ſpatium magnum obſervationum numerum colligere. Has in præſenti ſcripto communico, una cum meditationibus meis de origine lucis borealis, quas, cum novæ ſint, publico intelligentium iudicio exponere decrevi, ut ſic, quantum eæ valeant, ex aliis cognoſcam.

II. Propoſitum mihi eſt rem ita pertractare, ut primo ſuccinctam phænomenorum omnium deſcriptionem adornem, ex obſervationibus meis hactenus habitis collectam. Deinde, ut concluſiones aliquot inde deducam, quarum ope, adhibitis in ſubſidium propoſitionibus ex ſcientia phyſica petitis, in arcana huius lucis penetrare annitar.

III. Ob duplicem lucis borealis apparentiam duæ eius ſpecies conſtitui poſſunt. Prima vulgaris eſt & in his terris crebrior, ſub arcus forma ſeptentrionem occupat, radios ſive virgas lucidas ad verticem mittit, & luce quieta ſplendet. Altera quæ rarior eſt, cœlum verſus omnes plagas occupat, in partes diſſipata eſt, quibus breviſſimæ aut nullæ ut plurimum adhærent virgæ, ſplen-

dor

dor eius ut plurimum undulare aut tremulare putatur. Ex dicendis poſtea palam fiet, has duas ſpecies reipſa non differre, ſoloque ſitu duplicem hanc apparentiam effici.

IV. Primæ ſpeciei phænomena ſequentia ſunt:

1. Arcus lucidus verſus boream ita diſponitur, ut eius cavitas horizontem ſpectet, convexitas verticem.

2. Altiſſima arcus pars boream ad ſenſum ſemper exacte tenet.

3. Utplurimum crura horizontem attingunt.

4. Quo altior eſt arcus, eo amplius expanduntur crura.

5. Altitudinem arcus numquam ultra 40.gr. obſervavi, nec amplitudinem crurum ultra ſemicirculum.

6. Quo depreſſior eſt arcus, eo concinnior & regularior eſt eius rotunditas; ut plurimum quo altior eſt, eo magis vitiari ſolet ab intercedentibus fiſſuris, hiatibus, protuberantiis, flexuris, &c. Interdum, altitudine nil mutata, inconcinnus arcus ſenſim in ordinem componitur, & viciſſim.

7. Accidit ſæpe, ut novi arcus generentur, qui priori aut altiores aut humiliores eſſe ſolent, ſemper tamen priori coaleſcunt; quo ipſo fit, ut humilior aut altior evadere videatur.

8. Altior tamen & humilior quandoque fit ſine novis accedentibus arcubus obſervabilibus.

9. Spatium intra arcum & horizontem concluſum ſemper eſt tenebricoſum; ſtellarum tamen radios clariſſime transmittit, niſi nubibus oppleatur atris.

10. Interior arcus margo obſcurus eſt plerumque, exterior lucidus; confinium vero lucis & obſcurita-

ritatis diſtinguere non licet, quia una alteri ſenſim confunditur.

11. Virgæ, vel & interdum latiores tractus lucidi in longum exporrecti, exteriori arcus margini inſiſtunt, & paulo debilius lucent quam ipſe arcus. Accidit autem ſæpiſſime, ut ea arcus pars ex qua virgæ exeunt magis luceat quam reliquæ.

12. Omnes recta ad verticem tendunt, quem attingunt ſæpe, imo traiicere quandoque videntur.

13. Eiusdem pene latitudinis eſt unaquæque virga tam in fine quam in principo.

14. Æquabilis fere ſplendoris virga eſt quælibet; niſi quod prope arcum lucidior interdum videri ſoleat quam prope verticem.

15. Duratio unius virgæ brevis & incerta eſt; decem circiter minutorum ſecundorum eſſe ſolet ordinarie.

16. Ortus earum & interitus ut plurimum ſubitaneus eſt. Quandoque tamen apud arcum prius apparent quam in vertice, quandoque hic ordo inverſus eſt: ſic etiam mox hoc illove ordine intereunt.

17. Interdum, ſed raro, integræ non ſunt, & in fruſta quaſi diſſectæ videntur.

18. Moventur plerumque, aut verſus ortum, aut verſus occaſum; mox tardius, mox celerius; interdum una celerior eſt altera, ita ut ſeſe mutuo aſſequantur, vel curſu antevertant. Interea vero nec virgarum rectitudo nec directio ad verticem mutatur.

19. Raræ interdum adſunt aut nullæ, lucido licet

arcu exiſtente ; Interdum tam copioſæ adſunt, ut arcus pectinis inſtar appareat.

20. Sæpe accidit ut multæ ſimul oriantur, & evaneſcant iterum ſimul.

21. Stellæ ubique transparent , excepto obſcuro arcus margine interiore , qui ſtellas tegit, ſi adeſt.

22. Sæpe accidit, ut nubes aliquæ appareant, quæ altiores ſunt quam quas lux borea ſub ſe reliquit. Quod quidem ex diverſis coloribus & motibus manifeſtum fit; impoſſibile enim eſt ut nubes in eodem cœli loco viſæ diverſimode ferantur & illuminentur, niſi ratione altitudinis a terra multum differant.

V. Secundæ ſpeciei phænomena ſequentia ſunt :

1. Primo aſpectu cœlum flammis conflagrare videtur , Lux tremula & corruſcans apparet , eo fere modo , quo in acervo prunarum candentium lux tremula vagari ſolet : Hæc vero corruſcatio interdum magis, interdum minus, interdum vix ſenſibilis eſt.

2. Attentione adhibita diligentiori, lucidas nubeculas hinc inde diſperſas notare licet. Interdum facilis eſt hæc obſervatio , interdum difficilis ; prout ſc. nubeculæ aut ſpiſſæ ſunt aut ſubtiles ; item prout vel tarde, vel cito deflagrant.

3. Cum aliquando nubeculam talem in ipſo vertice hærentem contemplarer , eaque mox accenderetur, mox extingueretur iterum , obſervavi , eam ſubinde obſcuriorem evadere , ſenſimque nubem nigricantem ſub ſe relinquere, qua obtegebatur tandem.

4. Idem poſtea in aliis nubeculis animadverti, deprehendi autem, quod interea, dum accenduntur & extin-

tinguuntur, locum & figuram ſuam aut parum aut nihil mutent.

5. Dum accenduntur, tamdiu fere accenſæ manere ſolent ac virgæ prioris ſpeciei durant (§. 4. *n.* 15.)

6. Nubeculæ quæ a vertice remotæ ſunt proiiciunt interdum virgas lucidas, ſed breves & graciles: eo breviores quidem quo propiores ſunt vertici.

7. Ex relatione aliorum habeo, quod luculis talibus fulgura quandoque interſpergantur cœrulea.

8. Hanc lucis borealis ſpeciem raro obſervavi ſolam, ſocia fere ſemper adſuit prima ſpecies prius recenſita; una alteram aut præcedit aut ſequitur.

9. Lux nubecularum harum tanta eſt nunquam quanta arcus eſſe ſolet. (§. 4. *n.* 1.)

10. Lux hæc verſus horizontem ſæpe ſaturior eſt quam in vertice, ita ut interdum horizon undiquaque ſplendeat, eo fere modo ut arcus boreus ipſe. (§. 4.)

VI. Utrique ſpeciei communia phænomena ſunt ſequentia.

1. Apparere ſolet utraque ſpecies ab æquinoctio autumnali ad æquin. vernale. Æſtate enim vidi nunquam.

2. Utplurimum luci ſuccedere ſolent nubes ab initio ſquammatim diſpoſitæ, poſtea augentur & coacervantur ſenſim ſenſimque.

3. Utraque ſpecies ſereno aut ſemiſereno cœlo plerumque apparere amat; animadverti eam tamen quandoque per denſas, & cœlum ubique tegentes nubes hinc inde dehiſcentes.

 4. U-

4. Utriusque lucis ſplendor eſt pallidus, aut ſubalbidus.

5. Utraque lux levi vento interdum verſus aliquam mundi plagam ferri ſolet, quæ tamen ſemper contraria eſt plagæ verſus quam ventus in inferiore aeris regione ſpirat. Nullam huic phænomeno contrarium exemplum expertus ſum hucusque.

6. Non raro animadverti tepidam tempeſtatem antecedere ſolere aut & comitari, gelidam ſequi.

7. Si accidat ut continuis aliquot noctibus appareat, (quod ſæpe fit) ſequentes luces ſubinde fiunt debiliores, ut tandem vix conſpicuæ ſint.

8. Duratio utriusque lucis variabilis eſt valde, ſæpe pernoctes ſunt, ſæpe & paucarum horarum, prout nempe aer quieſcit, aut agitatur.

VII. Ex conſideratione enarratorum phænomenorum concludo, quod hæ duæ ſpecies non niſi apparenter differant. *Communes enim utrinque ſunt proprietates plurimæ* (§. 6.) *& quæ cuilibet peculiares eſſe putantur*, *ex ſola ſitus diverſitate poſtmodum explicabo*, *quæ quidem diverſitas ipſa obſervatur* (§. 3. §. 4. *n.* 1. 2. 3. §. 5. *n.* 1.)

VIII. De virgis lucidis dico, quod generentur reflexione radiorum emiſſorum a materia lucida, quæ ibi non exiſtit, ubi virgas videmus. *Quicquid videmus*, *id radiis videmus aut directis*, *aut refractis*, *aut reflexis*: *Si virgæ viderentur radiis directis*, *neceſſe foret*, *ut materia earum lucida in longum extenſa* 1°. *exiſteret in planis cuivis obſervatori verticalibus* (*ob* §. 4. *n.* 12), *hæc autem plana in aliis locis ſpectantium inclinata ſunt ad horizontem*, *ſequeretur ergo quod materia ubique in verticalibus ſimul*,

ſimul

ſimul etiam in planis inclinatis hæreat; quod impoſſibile eſt. 2°. Neceſſe foret ut materia hæc, in partibus a ſpectatore remotis, eſſet latior, & in propinquis proportionaliter gracilior, alias enim non poſſent apparere ubique æquelatæ; (§. 4. n. 13.) *atqui pro diverſis ſpectatoribus deberet hæc latitudinis varietas eodem tempore varia eſſe,* (*quod ex regulis opticis conſtat*) *& materia diſponeretur pro ſitu locorum, quos ſpectatores diverſi occupant; hoc vero impoſſibile eſt, ergo & viſio directa virgarum impoſſibilis eſt. Si loco diverſorum ſpectatorum aſſumas aliquot phænomena ab eodem ſpectatore diverſis temporibus obſervata, idem concludendum erit; nam nulla ratio eſt, cur omnes ignes eidem ſpectatori in directione conſtanti ſemper diſponantur? Si viſio refracta foret, deberet ultra vaporum refrangentium regionem materia lucida exiſtere quæ mox accenditur mox extinguitur* (§. 5. n. 3. & 4.) *quæ ventis agitatur.* (§. 6. n. 5.) *quæ vapores craſſos poſt ſe relinquit* (§. 5. n. 3. §. 6. n. 2.) *& quæ fulgurat* (§. 5. n. 7.); *Atqui hæc omnia iſti regioni non convenire videntur. Addo, quod ſol, luna, aut ſtellæ lucidiores tales virgas etiam producere deberent quandoque per refractionem, quod tamen nunquam hoc modo fit, nec quomodo fieri poſſit per principia optica, aut per ſimiles caſus oſtendi poteſt. Ita excluditur quoque viſio refracta & ſola reflexa relinquitur: quod quidem probandum erat.*

IX. De loco materiæ lucidæ dico, quod exiſtat in ea aeris regione ubi nubes hærere ſolent. *Nam inferior arcus margo obſcurus, cui lucidus ſemper contiguus eſt, pro nube aut vapore cenſendus eſt.* (§. 4. n. 10.) *maxime ideo quia ventis agitatur* (§. 6. n. 5.) *cum præterea ipſa lux in nubes abire ſoleat* (§. 6. n. 2.) *imo ſub nubeculæ aut*

vaporis lucidi forma appareat (§. 5. *n.* 2.) *& verſus horizontem denſior fiat* (*per* §. 5. *n.* 10): *patet hanc materiam nubium conditiones habere omnimodas, conſequenter & locum & diſtantiam a terra.*

X. Ut plures concluſiones formare liceat, introducam ſubſidiarias propoſitiones aliquot ex phyſicis petitas, quarum prima hæc ſit: Nubes in aere quieto ita pendent, ut inferior earum ſuperficies plana ſit & a terræ centro ubique æquidiſtet. *Quia enim gravitas aeris ſpecifica in æqualibus a terræ centro diſtantiis eadem eſt, nubes autem, quæ conſtant ex eiusdem generis vaporibus, ibi ſubſiſtunt, ubi earum gravitas ſpecifica coincidit cum gravitate aeris, patet, nubes ſubſiſtere in loco qui æquidiſtat ubique a centro terræ, adeoque in planitiem expandi terræ ſuperficiei ad ſenſum parallelam, eoque exactiorem quo aer quietior eſt.*

XI. Fidem huic propoſitioni facit experientia, qua conſtat, nubes, quo propiores ſunt horizonti, eo & baſim magis rectilineam habere, quæ horizonti ſemper parallela eſt; Hoc ideo fit, quia planities nubium inferior eminus poſita a latere ſpectatur atque ita tanquam linea apparet.

XII. Cæterum & ratione & experientia conſtat, quod nubes nubibus immineant; hoc eſt, quod planities unius nubis longius a terra diſtet quam planities alterius: Id quod & eo tempore evidenter obſervatur quandoque, quo lux borea apparet (§. 4. n. 22).

XIII. Aliud lemma hoc eſt: Obiecta quæ in aere æque alta ſunt, horizonti eo propria eſſe videntur, quo ſunt remotiora ab oculo ſpectatore; & viciſſim obiecta æque alta, quo horizonti apparent propiora, eo quoque ſunt remotio-

motiora a ſpectatore oculo. *Hæc ex ſcientia optica deſumta ſunt, ubi rigide demonſtrantur.*

XIV. Ex priori lemmate intelligitur & hoc: Si linea in aere pendula, eminus a vertice poſita, ſecundum parallelum orbis terreſtris extenſa, & a terra ubique diſtans ſit; ea ſub arcus forma apparebit, eo modo uti arcus lucis boreæ (§. 4. n. 1. 2. 3. 4.) Et viciſſim; ſi linea a terra æquealta ſub arcus forma appareat, cuius ſumma altitudo ſit exacte verſus boream poſita, illa erit ſecundum parallelum terreſtrem in aere expanſa. *Hæc ab iis qui opticam callent facile intelliguntur, quapropter a demonſtratione nunc abſtinere licet tuto.*

XV. Hiſce poſitis dico, quod materia lucis borealis ſecundum parallelum terreſtrem fere in aere diſpoſita ſit. *Nam hæc materia in nubium regione verſatur* (§. 9.) *ergo a terra ubique diſtat æqualiter* (§. 10). *Porro, ſub arcus forma apparet, cuius ſumma altitudo eſt ad boream directa* (§. 4. *n.* 1. 2. 3. 4.) *inde per* §. 14. *ſequitur quod occupet tractum in aere ſecundum parallelum terreſtrem extenſum. Dico autem fere, nam curvedo arcus borealis non ſemper eſt exactiſſima* (§. 4. *n.* 6.)

XVI. Ex opticis porro notum eſt, quod corpus figuræ irregularis inconcinnæ & inæqualis, figuram magis regularem, concinnam & æquabilem habere putetur, quo longius ab oculo removetur: Intelligitur inde cur arcus boreus eo exactior adpareat, quo propior eſt horizonti (§. 4. n. 6.) *Eo enim caſu eſt remotior.* (§. 13.)

XVII. Si corpora aliquot in aliqua planitie utcunque diſperſa & disiecta ſint, apparebunt quoque oculo tanquam disiuncta, ſi quidem perpendiculariter ad il-

lud

lud planum poſitus ſit; quo magis autem oculus hoc planum oblique intuetur, eo propius coire videbuntur obiecta, imo continuum corpus tandem conſtituere videbuntur: Item, lux ſive color obiectorum ſingulorum augebitur & ſaturior evadet. *Hæc iterum tanquam certiſſima ex opticis ſuppono.*

XVIII. Nubium planities circa verticem hærentes perpendiculariter aſpiciuntur; ſed quæ ad horizontem vergunt eminus & oblique aſpiciuntur. *Intelligitur hoc lemma ex* §§. 10. & 11.

XIX. Hiſce ſuperſtruo ſequentem de luce borea propoſitionem. Materia lucis huius in nubeculas lucidas eſt diſperſa & disiuncta; prior autem lucis ſpecies continua (§. n. 1.) & clarior (§. 5. *n.* 9.) apparet ideo, quod in hoc caſu materia eminus & oblique aſpicitur. *Quia enim hæc materia in planitiem terræ parallelam diffuſa eſt,* (§. 9. *&* 10.) *apparet in vertice eo modo quo diffuſa eſt,* (*per* §. 18. *&* 17.) *apparet autem disiecta* (§. 5. *n.* 2.) *ergo & disiecta eſt. Porro cum prior ſpecies a poſteriori non niſi apparenter differat* (§. 7.) *neceſſario ſequitur quod & materia prioris ſpeciei ſit disiecta; Itaque utriusque ſpeciei materia in nubeculas lucidas eſt diſperſa. Prior autem ſpecies ad horizontem vergit ſemper* (§. 4. *n.* 5) *adeoque oblique aſpicitur* (§. 18.) *neceſſe eſt ergo ut tanquam continua & clarior appareat.* (§. 17.) Q. E. D.

XX. Ex dictis intelligitur quomodo explicanda ſint phænomena quibus inter ſeſe differunt ambæ ſpecies.

XXI. Nunc pro explicandis virgarum phænomenis præmittam unam & alteram propoſitionem. Prima eſt: Si punctum aliquod lucidum in planum horizontale criſpatum

non-

nonnihil,& partibus politis conſtans,deſuper irradiet, radiosque ad oculum ſpectatorem reflectat, tum oculo apparebit linea aut virga lucida quæ a lucido puncto ad oculum recta extenditur. *Ex regulis opticis demonſtrari poteſt propoſitio ; verum & quotidiana experientia eam docet : Luna enim, aut ſtella lucida quævis in ſuperficiem aquæ tranquillioris irradians, oculo repræſentat talem virgam qualem deſcripſi.*

XXII. Huic alia innititur propoſitio ; quod ſcilicet inferior nubium,aut vaporum,ſuperficies lucida puncta ſurſum ſplendentia,ſub virgæ lucidæ forma,iterum deorſum reflectat. *Criſpa enim eſt , plana, & particulis aqueis aut glacialibus politis conſtat* (§. 10.) *planities nubium inferior. Sed præterea experimento didici veritatem propoſitionis huius : Noctu enim aliquando, ſuborto incendio, duas vel tres verſtas a domicilio , quod Petroburgi habeo , diſtante , excitatus rumore ſolito ad feneſtram cum amico ſpectandi gratia accurri, mox ſublatis in cœlum oculis,virgam vidimus ambo candentem,a plaga incendii ad oculos noſtros, ſive ad verticem cœli, extenſam, reflexam a nubibus nivem parturientibus, creſcentem mox, mox & decreſcentem, prout incendium augebatur quoque.*

XXIII. Confirmatur hæc propoſitio alio phænomeno, quod Petroburgi ita rarum non eſt, uti in Germania aut Gallia eſſe ſolet. Accidit nimirum quandoque hyemali tempore, ut ſol in ortu aut occaſu conſtitutus lucidam & candicantem caudam verticaliter ſurſum proiicere putetur ; deſcribitur ea in Commentariis Academiæ Scientiarum Gallicæ (Anno 1703. pag. 78.) eique ſimillima fuit quam incendium ſupra memoratum for-

mavit (§. 22.) Oritur autem hæc cauda a radiis ſolaribus, in planities vaporum ex particulis glacialibus conſtantium ab horizonte ſurſum vibratis, & ad oculos ſpectantium reflexis, eo prorſus modo quo virgæ lucidæ in ſuperficiebus aquarum generantur. (§. 22.)

XXIV. Hiſce præmiſſis dico: Quod virgæ lucis borealis oriantur a reflexione lucis quæ exiſtit in nubeculis lucidis (§. 19.) dum nimirum hæ nubeculæ radios ſurſum proiectant in planities vaporum ſuperimminentium ſubtiliſſimorum, a quibus deinde reflectitur ſub formis virgarum. *Oriuntur virgæ reflexione* (§. 8.), *ergo a nubeculis lucidis* (§. 19.) *oriuntur*; *nulla enim alia tum temporis lux in aere exiſtit*, *& virgarum ſplendor tamdiu durat quamdiu nubecularum coruſcatio*: (§. 4. *n.* 15. §. 5. *n* 5.) *Planities autem vaporum reflectens ſupra nubeculas exiſtit*, *quod intelligitur ex phænomenis allegatis* §. 4. *n.* 9. 10. 11. 22. *item* §. 12. *conſequenter illa virgas eo modo format quo dictum eſt* §§. 21. 22 23. Hac propoſitione explicantur phænomena adducta §. 4. *n.* 11. 12. 13. 14. §. 5. *n.* 6.

XXV. Quod ſi præterea ſupponatur, quod planities tam imminentes, quam nubeculæ lucidæ, levi vento agitentur, in promtu erunt explicationes phænomenorum §. 4. *n.* 16. 17. 18. 19. 20.

XXVI. Item quia materia lucida ſupra ſe vapores habet, quos illuſtrat, infra nullos, patet ratio phænomeni §. 4. *n.* 9.

XXVII. Si liquor in vaſe aliquo contentus in ſuperiori ſua parte verſus plagam aliquam agitetur, fiet ut inferior

ſerior pars liquoris ad fundum, moveatur in plagam contrariam. *Veritas huius & ratione & experientia facile adſtruitur. Cæterum ex eo pronum eſt concludere, quomodo producatur phænomenon §. 6. n. 5. allegatum.*

XXVIII. Quas dedi hucusque explicationes certitudinis gradum aliquem habere arbitror; reſtant autem alia phænomena, quorum explicationes æque certas non promitto: Quid de iſtis ſentiam paucis declarabo; præmiſſis aliquot propoſitionibus ſubſidiariis.

XXIX. Aerem ubique inflammabilibus ſcatere ſpiritibus ſeu vaporibus ſubtiliſſimis, conſtare puto ex fulguribus; ex perpetuis exhalationibus telluris, ſulphure, nitro, & ſalibus ubique abundantis; ex capitibus mortuis, quæ ex aere vitriola, ſalia &c. ſugunt.

XXX. Si tales inflammabiles ſpiritus copioſi in ſpatium nimis arctum congregentur, flammam concipiunt & deflagrant ultro. Hæc quoque propoſitio multis probatur experimentis phyſicis vulgo notis.

XXXI. Chymia quoque teſte, ſubtiliores quivis ſpiritus a frigore in minus ſpatium colliguntur: quidam facilius quidam difficilius. Non loquor hic de ea ſpirituum collectione qua condenſantur & in fluidi formam rediguntur, ſed qua ſolummodo propius ad ſe invicem coeunt.

XXXII. Dum ſol ab æquatore verſus meridiem recedit, regiones aeris boreales frigidæ evadunt, idque eo magis quo ſunt borealiores, & quo longius ſol recedit. Præterea regiones aeris eiusdem paralleli ſive climatis eodem fere frigoris gradu afficiuntur. Dico fere, nam aliæ quoque præter ſolem ſunt cauſæ huc concurrentes,

ſolis tamen abſentia ſine dubio præcipua frigoris cauſa eſt. *Manifeſta eſt hæc propoſitio, nec probatione ulteriori indiget.*

XXXIII. Hiſce ſubiungo propoſitionem, quam quidem pro certiſſima venditare non audeo, ſupponere tamen cogor in gratiam ſequentium; ea hæc eſt: Spiritus inflammabiles vaporibus aqueis, caloris ope, commiſcentur & implicantur, ſeparantur poſtea iterum, accedente frigore dum aquei citius coeunt quam ſpiritus inflammabiles.

XXXIV. Nunc dico: Sole in regionibus borealibus verſante, vel ventis calidis ſpirantibus, aer calefit, vapores aquei ſubtiliſſimi in aerem attolluntur, miſcenturque ſpiritibus inflammabilibus (§. 33. & 29.); recedente ſole ad meridiem, frigus ſuccedens, in eodem climate æqualiter diſtributum (§. 32.), Spiritus inflammabiles aqueis mixtos in nubeculas ſubtiliſſimas colligit (§. 31. & §. 19.), ex quibus ſpiritus inflammabiles ſenſim ſeſe expediunt, & ſupra illas congregantur (§. 33.), quorum ſufficiens copia collecta flammam concipit & deflagrat (§. 30.) qua conſumta nova colligitur & accenditur, & fabula hæc tamdiu luditur quam poſſibile eſt: *Hiſce convenire puto quæ Celeberrimus Prof. Wolfius dixit, dum materiam lucis boreæ immaturam fulguris materiam nominavit.*

XXXV. Ex dictis facile intelligitur generatio materiæ lucidæ; (§. 19.) Eiusdem diſpoſitio ſecundum tractum climatis alicuius (§. 15.) & tam crebro repetita accenſio extinctioque nubecularum lucidarum (§. 5. *n.* 3. & 4.) *Forſan etiam repetita fulgura in tempeſtatibus æſtivis ſimilem habent ortum.*

XXXVI.

XXXVI. Dum aquei vapores ab inflammabilibus ſucceſſive deſtituuntur, graviores fiunt, ſubſidunt & viſibiles evadunt; quo poſito adſcitisque quæ ſupra (§. 17.) dicta ſunt, *intelligitur ratio phænomenorum* §. 4. *n.* 10. §. 5. *n.* 3. *&* 4. §. 6. *n.* 2.

XXXVII. Hoc pacto fere cuncta, quæ luci boreali accidere ſolent, utcunque explicata dedi. Copioſior autem hæc materia eſt, quam ut omnem exhaurire potuerim, coactus proinde fui multa conciſe dicere ut brevis fierem. Si occaſio & rei dignitas id tulerint, plura aliquando de diſtantia materiæ lucidæ a terra proferre licebit, eam enim determinare poſſum geometrice, datis altitudine arcus, crurumque amplitudine horizontali, & conceſſa mea hypotheſi, quam ſupra (§. 15.) attuli. Sit enim ſinus elevationis poli $= q$. Sinus maximæ arcus altitudinis $= m$. Sinus dimidiæ amplitudinis crurum $= g$. Semidiameter terræ $= a$ & ſinus anguli qui æquatur altitudini arcus maximæ, & æquatoris altitudini ſimul ſumtis $= b$, ſic fiet diſtantia materiæ in vertice arcus exiſtentis ab obſervatore $= \frac{2amqqgg}{r\sqrt{rrbb-ggqq}}$. Inventionem huius regulæ, eiusdemque applicationem ad exempla dabo alio tempore.

XXXVIII. Sub finem annotare lubet, quod borealis lux antiquis temporibus æque ac noſtris nota fuerit; Erant qui eam in prodigiorum numerum retulerunt, erant & qui meteoris accenſuerunt, eiusque cauſam inveſtigaverunt. In poſteriorum numero Ariſtoteles eſt, qui in Meteorol. Lib. I. cap. 4. & 5. eam clariſſime deſcribit: Lucem, quam ego verticalem voco, ille comparat flammæ

in area ab accenſis ſtipulis ortæ, flammasque tremulas vocat capras, alteram vero arcuatam ſpeciem chaſma nominat, vocabulo tum temporis uſitato & deſumto ab interiore nigro arcus ſpatio, quod voraginem apte repræſentat; virgæ noſtræ illi trabes ſunt quas ex chaſmate aſcendere dicit. Plurima quoque lucis borealis phænomena deſcribit Plinius in Hiſt. Nat. Lib. II. capitibus 26. & 27. Qui meteorum hoc pro extraordinario & mirabili phænomeno habuerunt plures ſunt. Duo addam antiquitatis teſtimonia a Bayero noſtro mihi ſuppeditata. Primum extat in Chronico Edeſſeno f. 407. (quod habetur in Ioſephi Simonii Aſſemani Biblioth. Orient. Tom. I.) his verbis: „ Anno Seleucidaram 813. ignis multus „ viſus eſt in boreali plaga, qui tota nocte arſit „. Alterum eſt Roberti Monachi, qui in Libr. V. Hiſtoriarum Hieroſolymitanarum ad A. C. 1097. ita fatur: „ Sub „ illa nocte Cometa inter alia cœli ſidera rutilabat & ſuæ „ lucis radios producebat, & inter Septentrionem & O- „ rientem igneus rubor in cœlo corruſcabat. „ Addo hiſce Marcum Squarcialupum, qui in diſſertatione de Cometis, figuram lucis ſatis bonam dedit, cum hac deſcriptione: " Cœlum Anno 1575. in Vindemia Menſe O- „ ctobre per noctem integram arſit, vel ardere viſum „ eſt. Res mihi nunquam prius viſa, & omnibus certe „ mortalibus tremenda. Lux magna, latitante luna, „ ad Sleſiam & Sarmatiam extitit, inſtar crepuſculi ma- „ tutini. Erat in horizonte plaga in arcum eminens & „ oblonga: Atque ex lucido iſto tractu a ſumma extre- „ mitate radii ingentes modo hic modo ibi rectiſſimi e- „ rumpebant. Qui radii vel diu immoti ac turbinati ſta-

" bant

„ bant, vel diſſipabantur & novi ſubinde prodibant. Et
„ (quod cum ſtupore contemplabar) ex radiorum inter
„ vallis emicabant flammæ ingentes, tremulæ, quæ mox
„ in cœli verticem una poſt aliam curſu celerrimo fere-
„ bantur. In quo loco non pauci aliquamdiu manebant,
„ mox aliquæ evaneſcebant. Vidi ego nocte concubia
„ ab utraque lucis extremitate radios ad medium ſpatium
„ (*ad Zenith*) feſtinantes atque inter ſeſe adverſos & in-
„ feſtos tanquam duas acies inimicas acerrime concurren-
„ tes. Factus ibi conflictus & radiorum confuſio, ſeſe
„ inclinantium, adverſos prementium, mox refugientium,
„ ſe attollentium & contorquentium cum incredibili colo-
„ rum; punicei, violacei, flavi, rubei varietate. In
„ hac pugna & cœleſti certamine, inclinata orientis par-
„ te radii occidentes valentiores, fortiores & victores a-
„ paruerunt. Qui facile ſibi credunt, bellum horrendum
„ iam iamque inter nos & Mahometanos fore dicebant &c.
Huc referendas puto plurimas alias relationes antiquas & recentes de exercitibus, de haſtis, armis militaribus &c. in cœlo viſis.

RA-

RARI AC PROPE INAVDITI EX VTERO MORBI HISTORIA

VNA CVM NECESSARIIS MEDICIS ANIMADVERSIONIBVS

a

Petro Antonio Michelotto

perſcripta.

M. Nov. 1726.

EX utero potiſſimum fœminis diverſa vehementiaque mala naſci, & experientia notum, & a Græciæ Medico Hippocrate animadverſum eſt. Perdiuturnæ, & haud vulgaris, nervorum in ſplendidiſſima muliere diſtenſionis nervorum obſervationem cum Luca Scrœckio Celeberrimo, hoc tempore, Auguſtæ Vindelicorum Medico, & A. C. N. C. meritiſſimo Præſide hos ante quatuor annos communicavi. In præſentia inſolitæ, pene incredibilis, &, niſi me amor negotii ſuſcepti fallit, in omni medicinæ parentum cum Græcorum tum Arabum memoria inauditæ ex vulva ægritudinis hiſtoriam legentibus ſiſto.

Iudæa virgo duos & viginti annos nata, cui Riccam parentes *Caravalei* cognominati dixere nomen, hos ante quinque & viginti menſes, in morbum incidit ſuppreſſæ ex triſtibus animi affectionibus menſtruæ purgationis: inde primum angina; tum, interpoſito aliquo tempore, rheumatiſmo; deinde ſiniſtri lateris dolore per hyemem

cor-

correpta ſanguinis ex brachiis pedibusque detractione, aliisque idoneis medicamentis ab ſpectato, qui aſſidebat, Medico Moyſe Coheno præſcriptis curatur. Manente vitio menſium ſuppreſſionis cum vehementi ventris intentione, mœroreque cum crebro, difficilique ſpiritu concitatarum arteriarum pulſibus, continentibusque muſculorum ad brachia pertinentium exiguis tremoribus, continuante, medicamenta mulieribus hyſterico morbo fere exanimatis præberi ſolita, & nominatim remedium, cui *uterino elixiri* nomen autor Crollius impoſuit, data. Sub eo auxilio ſingultus, & cuiusquemodi generis ſive ſolidam, ſive fluidam formam habentium alimentorum vomitus exortus eſt: adverſus quem medicamentorum, tum opium recipientium, tum ventriculum confirmantium, compoſitionibus fruſtra tentatis, quem modo laudabam Medicus, diffiſus reliquis præſidiis, ad gelidas ex aqua, in qua modo ſubacidorum ceraſorum, modo fragorum, modo limoniorum malorum ſuccus cum modica portione ſolutus erat, potiones prudenter confugit: quibus, in ſtomachi reſolutione vomitum neque calidis neque anodynis remediis cedentem coniunctum habente, a me quoque proſpero ſucceſſu non ſemel adhibitis, conſecutus quidem eſt, ut ægra & continere, & coquere cibos poſſet, non tamen ut reliqua mala ſe remitterent: ad quæ ineunte Autumno Anni CIↃIↃCCXXIV rerum omnium, ſive cibi, ſive potus, ſive medicamenti ſpeciem obtinentium, inſigne faſtidium, urinæ ſuppreſſio, inexpugnabilisque alvi adſtrictio acceſſere. Eo tempore mollientia olea, aliaque medicamenta ducendæ alvi cauſa in anum per clyſterem infundebantur, quæ, quum repellerentur, de-

 ſpera-

ſperatis pene rebus, nutrientia quoque iuscula ex capo, gallinaceisve pullis, recentium ovorum vitellos intus ſolutos habentia, in ultima inteſtina (ex quibus etiam lactea vaſa oriri, non eſſe negandum ſummus noſtræ ætatis Proſector Io. B. Morgagnus apprime animadvertit) ſemel atque iterum die agere tentatum eſt. Verum enimvero, ſive poſtremo coli tractu, & fortaſſe continuati etiam recti magna parte, a præpollente incluſorum flatuum vi reliqua inteſtina, & peritonæum vehementius diſtendente (quod veroſimilius hoc in caſu mihi videtur) ad dextrum ſiniſtrumve infimi ventris caveæ latus compulſis, atque ad id arcte oppreſſis: Sive illis ipſis inteſtinorum partibus, ob valentiſſimas nervorum in thoracis, ac ventris imi penitiora pertinentium, quibus ægra in præſentia quoque vexatur, diſtentiones, maximopere contractis, renitentibusque: ſive hac, inquam, ſive illa de cauſa, neque reficientia, quæ dicebam, clysmata admitti quibant. Ita affectam, ita conflictatam nulla edendi, aut bibendi, nulla meiendi, nulla deiiciendi neque proximo hyeme, neque ſubſequente vere cupido cepit: Sorbilia ova, calida tepentiave iuſcula, cuiusquemodi generis vinum, gelidæ potiones etiam ex *cioccolatte*, (ſic enim a noſtratibus appellatur) lac miſtum cum ſaccharo vel frigidiſſimum, hæc, inquam, atque horum ſimilia, aut ex toto in faſtidio erant, aut reficiendarum virium cauſa, non ex appetitu, interdum aſſumta protinus reddebantur. Anni tempore verno acutiſſimo ſiniſtri lateris dolore prehenditur: Alii Medici ad conſilium adhibiti ſanguinem ad eum levandum, pondo circiter unciarum trium, ex reſpondente pede iacenti, morbo, longiſſimaque abſtinen-

tia

tia confectæ mittere non verentur : ipſo dolore per iſtiusmodi anceps auxilii genus, ſub quo vires haud multum admodum labefactari viſæ ſunt, ſublato, ſanguinis paulum tuſſi extunditur. Poſt hæc ſingultus, ſeu potius quidam vomendi conatus, per quem humor colore ſubobſcuro, odoreque urinæ ad longum tempus in iſchuria retentæ perſimilis ſæpius evomebatur, ſubortus eſt : qui ſine medicamentis brevi poſtea finivit. Subſequenti æſtate, ſive raptim mutatione morbi aliqua ex parte in contrarium facta, ſive blandis aſſidentis matris alia atque alia pro cibo & potione aſſidue offerentis hortatibus, ſollicitationibusque tandem decumbens filia commota modo tenuem ex citreis malis aquam, modo liquorem ex ſubacidorum ceraſorum cum mele, ac vini ſpiritu fermentato ſucco (Wiſna vulgo hic appellatur) ad cochlearia aliquot haurire cœpit : atque intra hos quidem liquores ſubſtitit, donec ad medium circiter Octobrem anni proxime exacti, quo conſtrictorio ventriculi motu ſurſum verſus cum atri fere humoris vomitu, reverſo, nec cibos, nec potiones, nec remedia devorare poterat, perventum eſt. Quum eam tum una cum curante Medico viderem, uti memoratum ventriculi motum remedio liquidi Helmontii *Laudani* ex ſtillatitia citrei mali aqua ſeptem, octove guttarum numero potui dato cohibere, & pergelidam ex capi ſucco citrei mali odore imbuto, certa ratione cum ſaccharo miſto ſorbitione pro cibo offerre tentarent, ſuaſi. Sed ne hæc quidem tenuit. Nihilominus tamen intra octo dies, quibus mente iam turbata, brachia & crura inæqualiter diſpergens, ſeque huc illuc violenter interdum convertens, modo obdormire, modo

triſtibus veluti exterrita imaginibus eiulare videbatur, ventriculus ex toto conquievit, atque ita quidem, ut & aquam & liquorem, de quibus mentionem feci, continere octavo die poſſet: poſt quod tempus mentis quoque turbatio, terroresque remoti ſunt, & ventris intentio, tametſi interim neque feces, neque urina emittebantur, paulum imminui viſa eſt. Silentio hic præterire non decet: duobus circiter menſibus antequam huius admirandi morbi hiſtoriam perſcribere inciperem, ægram, &, de quo ſupra ſcripſi, lateris dolore denuo exceptam, & ab eo, ſanguine ad duas tresve uncias ex brachio dolenti lateri reſpondente extracto cito liberatam eſſe. Verum hoc illud eſt præcipue ſcitu neceſſarium: ipſius ægræ, quæ a Septembri Menſe CIↃIↃCCXXIV. in præſens tempus vitam ſine omni fere potu transegit, corpus neque ex toto languere, neque notabiliter emarceſcere: quanquam inſignis ſeri ſanguine tincti copia cum ex pede, tum ex brachio ſummæ quoque cutis lymphæ ductibus ſcalpello in ſanguine mittendo laceratis, cicatriculisque (quarum ea quæ in lævo brachio exiſtit in profundum ulcus verſa eſt) tardiſſime forſitan ob malum univerſi corporis habitum confirmatis quotidie longiſſimum tempus manavit.

Facies in præſentiarum quoque colore eſt quidem fere naturali, at vero eam una cum reliquo corpore neque in ſpeciem, quemadmodum ante hos tres menſes videbatur (diſtendente ſcilicet tunc aere ex omnium pene corporis capillarium arteriarum cruore, animalium ſpirituum cuneolis, quam ſanis hominibus eſſe debent, acutioribus pulſo, atque muſcularium fibrarum interſtitiis, inviſibilibusque cutis foraminibus intercluſo) naturaliter ali,

cutis

cutis cum ſubiectis muſculis ubique locorum præterquam in abdomine aliquantum collapſa clave oſtendit. Cuncti ſenſus, ſi unum tactum, qui una cum motu in dextro femine & crure hebes eſt, excipias, vigent; vigor animi nequaquam obtuſus; ſupinum corpus ſemper, viribus muſculorum affectis, iacet; ventriculus, præcordiaque cum reliqui imi ventris magna parte, & vehementer intenta ſunt, & ad tactum leviter ſonant; perſiſtit quidem menſtruorum, & urinæ ſuppreſſio: veruntamen nulla omnino urinariæ veſicæ turgeſcentia manu percipitur; venter ne ſpiritum quidem per inferiores partes reddit; neque cibi, neque potus cupiditas ne in præſentia quidem eſt: attamen cremoris ex contuſis dulcibus amygdalis aqua ex citreo malo expreſſi paulum, ſic affectam a matre aſſidue rogitatam, ſolicitatamque ante hos undecim menſes per diem noctemque deguſtare cœpiſſe, idque nunc quoque continuare, certiſſimum eſt: nullus quidem ſudor præterquam in palmis manuum, pedumque plantis neque interdiu, neque noctu oritur: verumtamen oleagineam materiam ex ſebaceis univerſæ ferme cutis glandulis erumpere, cum ex totius pene corporis graveolentia, tum præcipue ex unctuoſa illa ſorditie, quam ſuis induſiis inhæreſcere, ægra hactenus ſe obſervaſſe mihi retulit, certo conſtat: nullus fere ex naribus mucus, nulla pene ex ore ſaliva emittitur: difficillimus ſomnus eſt; corripit interdum quidam frigoris ſenſus; ſæpe ventriculi, ſæpius capitis dolor torquet; brachiorum, manuumque muſculi in dextra præcipue parte continenter intremunt, crebra difficiliſque reſpiratio eſt; coagitantur ſemper cum corde arteriæ, triſtitia ſæpe infeſtat, interdum tamen hilaritas

 eſt:

eſt: nutrientia autem, de quibus ſupra ſcripſi, clyſmata in rectum inteſtinum indita ut protinus repelluntur, ſic cuiusquemodi generis & alimenta & medicamenta vi deglutita extemplo in præſenti quoque redduntur. Veruntamen illud ignorare non oportet: Acidulæ aquæ ex fonte *Lælio Recobarii* importatæ cyathum unum alterumve menſe circiter antequam huic hiſtoriæ finem imponerem potui datum, ventriculum retinuiſſe, eoque tempore urinam obſcuri coloris exigua ægram (quod tamen & proxime præterito anno, quo ne guttam quidem illius mineralis aquæ aſſumſit, non ſemel accidit) quantitate reddidiſſe.

Quod genus, quæ natura, per quas cauſas factus & auctus hic morbus ſit, ad ea, quæ hactenus retuli acriter intendentibus animum, haud difficulter admodum, uti opinor, innoteſcet. Lotii, eorum, quæ per alvum excedere conſuerunt, ſudoris, menſtruarumque purgationum ſuppreſſio; narium muci, ſalivæ inſigniter imminuta ſecretio: hæc, inquam, omnia, incomprimentium morborum numerum, eorum nimirum, qui ob fluidorum in noſtris corporibus, aut ex toto deficientibus, aut notabiliter decreſcentibus cooriuntur ſeparationibus, referendum eſſe, præclare demonſtrant: cepiſſe vero a trſtitia, & ſuppreſſis menſibus, artuum tremores, agitationes arteriarum, crebram, difficilemque reſpirationem, intentionem ventris; inſolitam abſtinentiam, mentis motionem eiusmodi malis interveniſſe; exanimari interdum ægram inde ad ſe redire; odoribus cum ſuavibus, tam fœdis lædi, queri modo de corde, modo de ventriculo, ſæpe de capite; modo triſtem, modo hilarem eſſe; interdum ſopore

re premi, plerumque vigilare; dextro ſemine, dextroque crure interdumque reſolutam videri, inde ſe dextrorſum, ſiniſtrorſumque violenter convertere; varios appoſitos cibos potionesque ſummo faſtidio habere: hæc, inquam, atque his ſimilia, virginem noſtram vehementiſſime ex vulva laborare haud obſcure declarant. Quod ad abditas, continentesque huiusmodi morbi cauſas attinet: inviſibilis fluidi ex cerebro, ac cerebello euntis, redeuntisque particulas in vehementes, diſſonosque reditus motus ſumma mœſtitia a primordiis morbi una cum nervis tum in exteriora, tum in penitiora corporis, & in uterum præcipue finitimasque partes pertinentibus repente actas eſſe coniecerim. Increſcente deinde paulatim morbo, continuantibus nerveorum filamentorum per thoracem, ac ventrem diſcurrentium contractionibus ſeparationum, excretionumque fluidorum naturales leges ire cœpiſſe præcipites donec ad omnium pene, qui in noſtro corpore ſunt humorum ſuppreſſiones, imminutasve ſecretiones perventum ſit. Ad hæc ingenti aerearum particularum copia, animantium ſpirituum impetu, acredineque (quæ longam abſtinentiam ſequi conſuevit) ex arteriarum ad ventriculum, inteſtina, iecur, ſplenem, uterum, peritonæum ſpectantium, arteriis reliqui corporis ob vehementes, in quas a morbi utique primordiis continenter aguntur, diſtractiones forſitan laxiorum: ex harum, inquam arteriarum ſanguine expulſa, inque earum partium ſinus ac caveas nequaquam reſiſtentes compulſa, univerſum pene ventrem vehementer intentum, & ventriculum ad eam diſtentionem redactam eſſe, ut motiones ad famem excitandam, retinendos, concoquendosque cibos

per

perneceſſarios iam obire non poſſit. Porro ut ex memoratorum ſpirituum in cor, arterias, thoracis, aliarumque partium muſculos influxibus, quam naturaliter eſſe debeat, celerioribus, velociores cordis & arteriarum motus, crebram difficilemque reſpirationem, muſculorum tremores, continentesque pene vigilias enatas crediderim: Sic inæquales vehementesque membrorum, quas una cum temporariis mentis commotionibus ægram non ſemel hoc in morbo excepiſſe ante retuli, coagitationes ex diſſimilibus, præcipitibusque illorum ipſorum ſpirituum motibus exortas eſſe, exiſtimarim. Sed illud potiſſimum interrogari me a legentibus poſſe ſentio: qui fieri queat, ut iuvenis hæc, & tamdiu ſine ullo omnino alimento vixerit, & ſolo liquoris, de de quo ſupra memoratum eſt, potu vitam tot menſes traxerit, in præſentia etiam ſuſtineatur? Quibus pro ingenii mei modulo reſpondeo: eam non multo ſecus ac viperæ in vitreis vaſculis vere, æſtate, atque autumno incluſæ, ſeu potius terreſtres cochleæ partem autumni, totamque hyemem in opertis teſtaceis tabernaculis ſine omni plane eſca viventes vitam trahere, veriſimillimum esſe. Namque & continuo iacet in lectulo, & viſibilium humorum pene nihil excernit. Manare vero exigua corpuſcula, tum per inviſibilia cutis foramina, tum per os ex pulmonibus, ut omnino negare non auſim, ſic eorum corpuſculorum, ſpeciem vaporum habentium, haud multum admodum hoc in morbo extra corpus ferri: ex ſummæ tabis, ſudoris in univerſa ferme cute abſentia maxime probabile cenſeo. Quandoquidem itaque iacens haud inſigniter tenuatur, paulum admodum movetur, &

viſi-

viſibilium quidem humorum fere nihil, inviſibilium vero pauxillum reddit: Manifeſtum eſt, nec ſanguinem, nec humores maximopere abſumi; ac propterea neque villos, membranas, nervos, ſanguinis aliorumque liquorum ductus, muſculosque conſtituentes, mobilium particularum ex illis ipſis villis manare, atque per aera diſpergi iugiter conantium eruptione inſigniter exinaniri, ſeu in talem reſolvi; atqui aſſumendi cibi neceſſitas in univerſis animantium generibus ex villorum memoratas partes compingentium, continua inanitione, notabilive continenter decedentium particularum naturales operationes ſive animales motus ſubſequi ſolita excretione dependet: Iuvenem igitur de qua hactenus retuli, in qua fortaſſe oleaginoſi quoque humoris in ſebaceis univerſæ cutis glandulis, Celeberrimo animadvertente Morgagno, ſeparari ſoliti aucta præter naturam craſſities inſenſibilem (quemadmodum Medici loquuntur) tranſpirationem inſigniter minuit, & ieiunium ſeptem amplius menſes ſuſtuliſſe, & pauco fluido alimento etiam nunc ſuſtineri, ſine aliquo commento prodigii ediſſeri poteſt.

Ratione haud multum admodum diſſimili, quemadmodum præſtantiſſima virgo ex Patricia Gente Foſcarena Patavii inpræſentiarum in cœnobio D. Marci commorans, triennem ferme (quod a viris ampliſſimis eius conſanguineis accepi) tulerit abſtinentiam, aliæque virgines, quæ referentibus Fr. Citeſio, eruditiſſimoque Fortunio Liceto, plures annos, nihil plane aſſumpſere, vitam traxerint, per cauſas mechanicis ſimiles exponi poſſe, mihi videtur; nedum enodate explicari complurium dierum, menſiumve abſtinentiæ a Ioh. Quercetano, R. Do-

donæo, Valeſco, Tharautano, Henrico Sampſonio, aliisque obſervatæ.

Ex propoſita hiſtoria, aliisque conſimilibus a modo allegatis rei medicæ ſcriptoribus perſcriptis primum omnium conſtat, haud eſſe fabulam: Homines interdum mulieresque præſertim, quas uterus diutius male habet, ab cuiusquemodi generis cibis & potionibus in adverſa valetudine abſtinentes, non duos tantummodo, tres pluresve dies, quemadmodum credebat Hippocrates, verum etiam complures menſes annosque vitam ducere poſſe. Hoc illud deinde colligitur, noſtræ ægræ corpus (mirum dictu) pro ratione longitudinis abſtinentiæ haudquaquam eſſe tenuatum, ſecus ac in puellis a Citeſio, Quercetano, & Sampſonio productis, in quibus flaveſcens abdomen cum areſcentibus incluſis viſceribus longiſſimo ieiunio extenuatum ad ſpinam collapſum obſervabatur. Verumtamen de virgine quadam Patavina noſtræ quod ad abſtinentiæ tempus, aliaque morbi ſymptomata ſpectat haud multum admodum diſſimili ex Alexandro Vigontia Medico narrans ante laudatus Licetus, nequaquam eam tabidam, ſed vivido colore, & in ſpeciem ſanæ extitiſſe ait. Venetiis Quarto Kalendas Quintiles CIↃIↃCCXXVI.

Vid. Hippocr. Lib. de Flatibus, & M. C. N. C. Decur. I. A. III *l & Fort. Licet. Libr. de iis, qui diu vivunt ſine a imento.*

OB-

OBSERVATIONES ANATOMICAE.

I.

Tumores veſiculoſi.

GLobuli cavi, pellucidi, qui unionum forma viſceribus appenſi ſunt, quoad eorum producendi modum a Viris eruditis excogitatum, nova hodie difficultate laborare videntur: Nam hydatides hodie oſtenduntur, quæ non in ſuperficie ſolummodo ſed in profundo partium generatæ ſunt, uti autopſia teſtatum facit. Hæ in cavitate quadam cuiuslibet viſceris aggregatæ, ſerum continentes purum, pedunculis modo annexæ modo liberæ iacent. vid. *Ruyſchius. Courtial. Iourn. des Sc. An.* 1697. fol. 442. 457. *Hiſtor. Reg. Acad. Paris.* fol. 454. *Mem. de l'Acad. Roi. des Sc.* A. 1704. Iam manifeſtum eſt in hacce ſpecie notionem glandularum ac lymphæductuum paulo infelicius applicari, ſicuti rationes tum ex partium ſtructura tum ex obſtructionibus artificialibus deſumtæ demonſtrant. Omnium vero graviſſima difficultas illa eſt, quæ in certa ſpecie hydatidum nobis oblata eſt, cuius nullum exemplum forte exſtat. Hæ magno numero & ſub varia magnitudine amplo ſacco incluſæ ſunt, omni nexu ſolutæ & liberæ, nullo pediculo præditæ nec ſibi invicem cohærentes, & (quod attentione digniſſimum eſt) in ſua cavitate alias veſiculas minores, quæ ſimiliter cavæ aliisque veſiculis exiguis fœtæ ſunt, continentes. De hiſce ſeqq. hiſtoria legi meretur.

Exeunte Anno 1726. in hepate viri fumo carbonum exſtincti, cuius reliqua viſcera nullo ſenſibili vitio

rupta erant, prope fundum veſiculæ felleæ magnus eminebat tumor globoſus, cuius alterum hæmiſphærium ſubſtantiæ hepatis firmiter incorporatum erat. Poſt eius ſeparationem, antequam incideretur, lanci impoſitus eſt, isque unam libram & quatuor drachmas pendebat, ex cuius proinde mollitie & albo colore magnam humoris quantitatem in eo collectam eſſe viſum eſt. Inciſione facta rem ſecus ſe habere humoribusque vacuum tumorem eſſe admirati ſumus. Tota eius cavitas ab imo usque ad ſummum incredibili numero veſicularum compreſſarum & pelliculas uvarum vacuas mentientium infarcta erat, hancque veſicularum congeriem unus ſaccus globoſus cute admodum dura & craſſa eaque exterius lævi & polita, interius vero aſpera conſtans, ſeptemque drachmas pendens continebat. Eo aperto odore omni vacuum deprehendimus, etſi veſiculæ colorem virideſcentem obtinerent. Quamquam earum prodigioſa quantitas eſſet, ſui omnes iuris hoc eſt liberæ & ſolutæ absque ulla ſive cum ſacco ſive inter ſe invicem connexione, mutuo tantum ſeſe exoſculantes & comprimentes iacebant, verbo, exactiſſime pelliculas uvarum vacuas tum figura tum colore herbaceo ſeu virideſcente æmulabantur. Subſtantia pellicularum minime fibroſa ſeu organica, ſed concretum quoddam gelatinoſum eſſe videbatur. Quoad magnitudinem, ſub triplici differentia oblatæ ſunt nempe maiorum, minorum & minutiſſimarum, quæ invicem permixtæ acervo eodem comprehendebantur: Ovum nonnullæ columbinum, aliæ fabam, aliæ denique piſum æquabant.

Exteriore harum veſicularum diſpoſitione ſic perluſtra-

ſtrata ad interioris quoque cavitatis contemplationem devenire neceſſe fuit, ſucceſſu minime pœnitendo, ſiquidem in phænomeni extraordinarii & forte inauditi cognitionem præter ſpem incidimus. Poſtquam veſicularum nonnullarum expanſio ſeu inſufflatio immiſſo aere facta eſt lucique hæ exponerentur, aliquid in earum cavo quod flatu ſeſe movebat, includi nobis viſum eſt: Veſiculis igitur apertis, nihil aliud quam minores veſiculæ ab omni nexu liberæ, inæqualis magnitudinis, minime inter ſe cohærentes, in vacuo fluitantes, numero ternario quaternariove, magna cum lætitia ſpectatorum oblatæ ſunt. Cæterum tum colore, tum figura, tum ſubſtantia, a continente veſicula quæ ovarii vices tenebat, haud abſimiles erant. Poſtremo ne quicquam intactum relinqueretur, cupido inceſſit eas omnes veſiculas toto acervo comprehenſas enumerandi earumque ſummam extrahendi. Itaque ſine reſpectu magnitudinis, portio harum veſicularum permixtarum usque ad unius drachmæ pondus lanci impoſita eſt. Quæ numeratæ præter minores earum cavo contentas ſeptuagenarium numerum cum uno aut altero completum, efficiebant: Ex quo veſicularum ſumma, quæ quidem ultra 9000. aſcendit, facile colligi poteſt. *Tab.* 12. *Fig.* 4.

Hoc certe phænomenum etſi ſolutu difficile, ex bullis humorum vitioſorum magis quam fragmentis organicarum partium originem ſuam trahere veroſimile eſt.

II.

Ruptio Lienis.

Eousque quorundam hominum ſtultitia excedit, ut *Exſplenii*, hoc eſt, ſine liene vivere pro ſummo bono ali-

quando teneant. Idcirco in generis humani perniciem quædam operatio, transfuſoria funeſtior inventa eſt quam *Excijionem lienis* vocant. Culter ligneus ſuper hypochondrium applicatur, quem una manu ſuſpenſum tenet artifex, deinde malleum altera manu prehendit, ac cultrum magna vi, unaque cum ipſo lienem, uti fabulatur, percutit. Quo facinore perpetrato, non ſolum disruptionem lienis ab ictu factam eſſe impudenter affirmat, ſed talia etiam exhibet remedia quæ vim habent totam masſam lienis diſſolvendi eamque ſic comminutam modo per vomitum modo per alvum vel quacunque via alia expellendi. De hacce inviſibili exciſione lienis vid. *Iourn. des Savans* 1672. Quum in hocce negotio non de ære ſolummodo, ſed de vita hominum certo certius agitur, periculum ſaltem indicandum eſt: Etſi enim tales impoſtores disruptionem lienis neque intendant neque forte poſſibilem aut noxiam eſſe putent, lienum tamen ex levi cauſa diffractorum mortemque inferentium exempla contrarium demonſtrant, laterisque percuſſiones periculo plenas evidenter ſignificant. In hunc modum Vir iuvenis, pugnis cum altero ſeſe excercens in hac urbe ſubito mortuus eſt: Vix enim cultro inciſis abdominis tegumentis quæ vehementer diſtenta erant, tanta copia cruoris exiit, ut pelves omnes præſentes vix ſufficerent, unde venter ſtatim detumuit; Lienem in medio ruptum, ea parte qua ſtomacho obverſus eſt, hocque proinde vulnere hæmorrhagiam excitatam fuiſſe perſpicue obſervavimus.

III.

Hæmorrhagia omenti.

Sub eodem tempore, percuſſionis Abdominis infelicem exitum alia diſſectio fœminæ a milite percuſſæ & ſubito mor-

mortuæ nobis expoſuit. Poſtquam enim totum abdomen ſanguine effuſo oppletum eſſet, ex omenti hæmorrhagia hanc occubuiſſe ex hoc uno conſtabat, quia inter folia omenti parvi grumuli intercepti & incluſi erant. Cæterum in rariſſima hacce læſione, illud forte in conſiderationem trahendum eſt, quod præter naturæ inſtitutum, omentum fundo uteri connatum eſſet. vid. *Ruyſch. Obſ. Anat. Chirurg.* LXIII. & LXXXIII.

IV.

Hæmorrhagia ſtomachi.

Inter mortes ſubitas hominum inſolens exemplum hæmorrhagiæ occultæ Stomachi ſe ſiſtit, non ea de cauſa lethalis, quia ſanguis extra nimium in modum prorumpit; ſed quia ſtomachus citius ſanguinis copia opprimitur & ſuffocatur quam eius ſive per os ſive per inteſtina effluxus excretiove fieri poteſt. Eo autem modo homo ſexagenarius enecatus eſt improviſo absque ulla ſuſpicione cauſæ in ſtomacho latentis, hoc eſt, ſine vomitu, ſine deiectionibus cruentis. Tota cavitas ventriculi uno prægrandi & formam eius referente grumo eum in modum obſeſſa & oppleta erat, ut ſpatium nullum vacuum inter pylorum & ſiniſtrum orificium relinqueretur. Cæterum prædictam maſſam nihil aliud eſſe quam purum ſanguinis grumum absque alterius ſubſtantiæ permixtione tum viſu tum experimento cognovimus. In ſtomacho mirum dictu! perfectæ integritatis: In Liene e contra putredinis notæ deprehenſæ ſunt.

V.

Notæ ſeu impreſſiones fulminis.

Notas ſeu impreſſiones fulminis tam externas quam internas in variis regionibus annotatas, forte non omnino contemnere licet, ut natura huius ſtupendi phænomeni paulo cla-

clarius eluceſcat: Abdominis & membri genitalis inflatio: Cutis lateris ſiniſtri in durum corium igne torrefactum commutata , in reliquis partibus purpurea , in collo rubra: Sanguinis ex aure dextra ſtillicidium : In ſummo vertice vulnus lacerum absque cranii læſione, non penetrans, 2. lineas longum & $\frac{1}{2}$ latum , externe conſpectui oblata ſunt. Interne præter copiam ſanguinis inſolitam in cranii apertione erumpentem , ſanguis in duræ matris ſinubus inſtar aquæ fluidus , item in ventriculis & baſi cerebri , inque vertebrarum theca ſeri magna copia incluſa apparuit. Pectore aperto uterque Pulmo mediocriter collapſus nigricansque; Cordis ventriculi, auriculæ, vaſaque communia ſanguine vacua. Separatis denique abdominis tegumentis inteſtina una cum ſtomacho præ inflatione magno impetu proiecta ſunt. Hepar , Lien ac Renes vitio carebant: Sed veſica tum fellea tum urinaria vacuæ & collapſæ , cum ureteribus retentione urinæ valde diſtentis.

Hæcce in viro ſuper fluvium navigante fulmineque peremto obſervata fuere.

CLASSIS

TERTIA

CONTINENS

HISTORICA

et

CRITICA.

DE ORIGINE ET PRISCIS SEDIBVS SCYTHARVM.

Auctore

Theophilo Sigefrido Bayero
Regiomontano.

VT omnes intelligant iam inde a principio, quae mea de Scythicis gentibus opinio ſit, ita praedico, me nequaquam ex earum ſtirpe Sarmaticas, Ruſſicas & Sclauonicas gentes, aut Hunnos veteres noſtrosque Hungaros, aut denique Tattaricos populos repetere, ſed Lituanos & veteres Pruſſiae incolas, (1) tum **M. Mart 1726.**

(1) *Non tuli inique ea, quae eruditi viri in Memoriis Treuultinis in me iecerunt, cum noſtram de Pruſſicis originibus ſententiam attingerent : ſpero enim eos pro aequitate ſua, plus mihi, cognita cauſſa, conceſſuros eſſe.*

Curones, Liuones, Aeſtios, Fennos, & Lappones, & paucos alios. Iſta tam directa confeſſio obuerſabitur animis haec noſtra legentium; donec in progreſſu id a nobis paullatim conſtitutum reperient. Cum Ruthenos non patior ſuppoſititiam Scytharum eſſe prolem, iam fructum eum refero, quod turbari ſtirpes & inſeri nobilisſimam per ſe gentem alienis populis non ſino. Simul et illud operae pretium facio, quod de ea regione, quae a Scythico nomine antiquitus nobilitata fuit, nunc acceſſio ingentis Ruſſorum imperii eſt, exquirendo veterem memoriam elicio & quaſi exprimo, quod aut verum ſit, aut ad veritatem quam proxime accedat, ne dicam, illis me adiumento eſſe, qui in ediſſerendis Hungarorum, Polonorum, Tattarorum, Turcarum, aliorumque populorum originibus, ad Scythas veluti tempeſtate delati, tamquam ad ſaxum adhaereſcunt.

Nam, qui ante nos de Scythicis rebus commentati ſunt, vno inſigni maxime errore implicati conſtrictique fuerunt, a quo niſi prouidemus, oleum & operam in reſtituenda veteri gentis illius memoria perdimus, multorumque aliorum populorum origines aut proxima originibus coinquinamus. Multos & magnos viros citare posſem, ni ſatius ſit, eorum nomina, ex quibus quotidie in aliis proficimus, in hac aberratione ſilentio obtegere, quam quaſi pompam hac praeterducere. Extendunt autem Scythicum nomen vaſtiſſimis terrarum ſpatiis ab Iſtri propemodum fontibus & Viſtula Balticoque mari, iuxta Oceanum ſeptemtrionalem & Pontum Euxinum Caspiumque mare, vsque ad extremum orientem. Eo in errore vetuſti quoque ſcriptores praeluſerunt, noſtrisque

fue-

fuere offenſioni. Primus eorum de quibus conſtat, Ephorus in quarto hiſtoriarum libro, orbem terrarum inter Scythas, Indos, Aethiopas & Celtas diuiſit. Fragmentum eius loci Coſmas Indicopleuſtes in Topographia chriſtiana conſeruauit. (2) Non ſum neſcius, quod a Diodoro Siculo (3) obiecta eſt Iſocrateo illi Ephoro veri negligentia & quidam quaſi ſtupor: ſed quam leniſſime pronunciari velim, poſtquam hiſtoriæ eius interciderunt, ut iudicari non poſſit. Video igitur Ephorum, cum locorum poſitus per certa capita diſtribuere & explicare conſtitueret, inſigniorum nomina gentium vaſtioribus ſpatiis adhibuisſe, nulla mala fraude, at ſucceſſu infelici. Nam Ephoro quoquo modo dicta, pro exploratis habebant Graeci plerique & Romani, ita gliſcebat error poſteritate. Igitur tot tamque diuerſae ſtirpis gentes non modo intra communem quandam regionem definitae, vnum omnes Scytharum nomen his auctoribus ſubierunt, ſed etiam ab illa regionis appellatione in eandem nationem ſunt conflatae. Sic Cimmeriorum res cum Scythicis, Scytharum cum Sarmaticis, Ruſſicis, Hunnicis, Tattaricis commiſcentur. Sunt qui deinceps non modo regiones, ſed etiam tempora confundunt. Nam quaecumque regionum aut gentium illarum nomina apud omnis aevi ſcriptores reperiunt, ea ad deſcribendam geographiam adhibent, tamquam aleatores teſſeras, quibus temere in tabulam ia-

(2) *f.* 148. (3) *f. 26. ed. Steph.* ἀλλ᾽ ὐκ ἄν τις παρ᾽ Ἐφόρῳ ζητήσειεν ἐκ παντὸς τρόπυ τἀκριβὲς, ὁρῶν αὐτὸν ἐν πολλοῖς ὠλιγωρηκότα τῆς ἀληθείας. *Apud Ephorum accurationem conſummatam fruſtra quis quæſiuerit, qui videat in multis eum parvi pendiſſe veritatem.*

ctis, quaecumque ſors exit, ſitum illarum definiat, τρεῖς ἕξ, ἢ τρεῖς κῦβοι, quae quidem ſecum, ſi verum ſpectant, commentata & meditata habere debebant. Nobis adhibenda diligentia eſt, ne noſter labor in easdem reprehenſiones iure meritoque incurrat, neue quis nos debito teſtimonio priuet, nihil nos ex vano haurire voluiſſe & inexplorata non edidiſſe pro compertis.

Scythas plerique a Magogo Iapeti filio ortos referunt, quorum in numero Samuel Bochartus facile princeps eſt. In ea opinione nemo eſt antiquior Ioſepho, (4) qui quidem Scythas nomine cieat. Hauſiſſe autem videtur ex Ezechiele (5) qui terram Magog ad ſeptemtrionem Caucaſi inter Tanaim & Volgam ponit. At idem ille cum populum Scythicum *Gog in terra Magog* adpellat, ſatis perſpicue oſtendit, alium populum Magog ante Scytharum irruptionem illa loca incoluiſſe, quae adhuc priſcum nomen apud gentes Aſiaticas retinuerint. Tantum igitur abeſt, ut Ezechiele auctore Scythas a Magogo repeti conueniat, ut is etiam adverſarius huic opinioni ſit. Alii Turcas quoque & Tattaros Magogicae ſtirpi adſerunt, quos quaſi ab aboriginibus ſuis Ezechiel *Magog* nuncuparit. Itaque de primis Scytharum parentibus & auctoribus non liquere puto. Hoc tamen mihi viſus ſum ex argumentis minime vanis coniectura conſequi, Scytharum maiores ex Armenia deſcendiſſe ad auſtrum atque tum orientem petiiſſe hibernum, donec ad ſeptemtrionem Caſpii maris, a tergo vrgentibus aliis familiis,

(4) *Antiq. Iud. Lib. I. c. 7.* (5) *c.* XXXVIII. XXXIX.

liis, conceſſerunt. Ex eo tempore ad ſeptemtrionem maris Caſpii & ad Volgam eos degiſſe reperio, iuxta Maſſagetas & Iſſedonas. Scythae ipſi ſe mille ante Darii expeditionem annis ortos tradidere apud Herodotum. (6) Interſeritur huic loco a Scythis fabula: Targitaum Scytharum patrem Ioue & Boryſthenis fluminis filia natum, tres habuiſſe filios. Nomina eorum hæc ſunt: Leipoxais, Arpoxais & minimus natu Colaxais. Colaxais imperium caeleſti prodigio adeptus eſt, a quo inter Scythas nobiliſſima domus οἱ βασιλῆες οἱ καλέονται Παραλάται *reges, qui dicuntur Paralatae*: a Leipoxai Αὐχάται, ab Arpoxai, Κατίαροι καὶ Τράσπιες. Colaxais rurſum in tres diuiſit filios gentem. Vniuerſi ſe Σκολότους τοῦ βασιλῆος ἐπωνυμίην *Scolotos, quod regum cognomentum eſt*, adpellarunt. *Scythae* ſunt vocati tantummodo a Graecis, vt diſerte monet Herodotus. Inde autem manauit vocabulum, quod, cum Graeci, qui inter eos in coloniis Ponticis degebant, admirabilem eorum in ſagittando artem & induſtriam cernerent, ſagittariosque ab iis *Scythas* dici audirent, id nominis toti genti attribuerunt. Et manet adhuc vocabulum in Scythicae originis linguis. Hodie Lituanis *Szauti iaculari* & *iaculatorem* ſignificat, a quo eſt apud Conſtantinum Szyruidum *Szaudu, arcu, ſagittis iaculor* & *Szaudikie ſagitta, ſpiculum*, Fennis & Liuonibus ſagittarius eſt *Skytta* & *Kytta* ſeu *Kyt*, ſic Curonibus & Aeſtiis & Lapponibus. Veteribus denique Prutenis, vt Praetorius in orbe Gothico nos docet, fuit *Szythi*. Manauit etiam in aliorum & diuerſae ſtirpis popu-

(6) *L. IV. c. 7. ed. Gron.*

pulorum linguas. Et apud Graecos Scytharum nomen per monumenta euaſit celebrius, quam Scolotorum, verum quidem, ſed obſcurum nomen. Manſit tamen Scolotorum nomen apud Athenienſes in ludibrio. Nam publici miniſtri & vigiles Athenis dicti ſunt Τολόται, iidem & Σκύθαι & Τοξόται. Tolotae a Scolotis deprauatum. Scythae iidem, quod ſagittarii eſſent & in medio foro habitarent ſub pellibus. Sic apud Romanos per contemptum a Phrygibus, Dacis, Syris, Getis, ſerui nomina habuere.

Quantum in hac Scytharum narratione apud Herodotum verum eſſe videatur, quaerendum nobis duco. Ego vero eiusmodi veteres gentium memorias contemnere non ſoleo. Forte, quod a Ioue & Boryſthenitide Herodotus interpretatus eſt Targitaum prognatum fuiſſe, id eo factum, quod pater ei Pappaeus aliquis (Pappaeum autem ſummum deum dixere Scythae, Iouem ſuum Herodotus putauit) & mater e Cimmeriis ad Boryſthenem, regia domo oriunda eſſet. Sub Targitao Scythae in vnum corpus & rempublicam coaluere, diuiſi poſtea in tres eius filios totidemque tribus. Plerique populi a conſtituta primum republica aut inſigni aliqua conuerſione originem repetierunt. Chaldaei Calliſtheni de vetuſtate eorum ſciſcitanti, mille nongentorum trium annorum ſummam edidere, teſte Porphyrio apud Simplicium de caelo. Ex quo colligitur, Chaldaeos centum et quindecim annis diluuio poſteriorem gentis ſuae originem poſuiſſe, ab eo tempore cum reipublicæ formam ſubierunt. Ergo cum Scythae mille annis ante Darii expeditionem ſe ortos tradunt, initium reipublicæ ſuae nobis aperiunt.

riunt. Si expeditionem Darii ante annum periodi Iulianae 4200 collocamus, hiſtoria Scythica caput tollit circiter annum 3200, ſiue annis 1514. ante epocham Dionyſianam, extremo tempore ſeruitutis Iſraelitarum in Aegypto.

De priſca autem Scytharum regione Herodotus (7) ita acceperat: Scythas, Nomadas fuiſſe, et in tuguriis paſſim circum opportuna paſcuis loca trans Araxem coluiſſe, inde pulſos a Maſſagetis bellum intuliſſe Cimmeriis ſuper auſtrali mari ſeu Ponto Euxino habitantibus. His veluti parum conſonantia ex Arimaſpeis Ariſteae Proconneſii addit: Arimaſpos pepuliſſe Iſſedonas, Iſſedonas a tergo vrſiſſe Scythas, Scythas, non, niſi cedendo ab infeſta Iſſedonum vicinitate ſe defendere potuiſſe, idcirco inuaſiſſe Cimmeriorum regiones. Hic vero Herodotus: (7) οὐδὲ οὗτος συμφέρεται περὶ τῆς χώρης ταύτης Σκύθῃσι *ita nec Ariſteae cum Scythis conuenit in regione, quam primitus incoluerint, conſtituenda.* In quo autem, Herodote, Ariſteas Scythaeque diſſentiunt? Scythae, ſe primitus vltra Araxem coluiſſe tradunt: at Ariſteas iuxta Iſſedonas, hoc eſt, ad orientem Caſpii maris. Ita videlicet eſt. Araxem quem Scythae dicerent, Herodotus ignorauit, putauitque, illum eſſe in Media ἐκ Ματιηνῶν, (8) quae ad meridiem vicina Armenis prouincia eſt. (9) Is autem Araxes longiſſime vtique ab Iſſedonibus & oriente diſtat. Sed non vidit Herodotus, Scythas ab hoc flumine non potuiſſe ſe in Cimmeriorum regiones infundere. Quae enim illa fuit diſcurſatio, ſi Scythae per

(7) *L. IV. c.* 13. (8) *L. I. c.* 202. *ſeu potius* Ματιηνῶν *vt Gronouius recte edidit.* (9) *L. V. c.* 48

Medicas prouincias patefacto itinere, traiectoque Araxe, in Cimmeriorum terras irrupiſſent, atque inde perſequentes hoſtium agmen, fallentibus fugientium veſtigiis, per errorem viae in Mediam, eadem qua iuerant, reuerſi, ex inopinato incidiſſent. Hoc ne obiiceretur, timuiſſe videtur Herodotus. (10) Igitur regionem ab Iſtro ad Cercinitin vocat *veterem Scythiam*, tamquam ex ea regione Scytharum maiores per Boſporum Thracicum in Aſiam minorem ſuperioremque & Araxe traiecto per clauſtra Caucaſea in Cimmeriorum terras conceſſerint. Siue ita ſcenam, ſeu quemcunque in modum inſtruxerit Herodotus, vndique haeret & tenetur.

Dicam, ſicuti ſentio, neque tam Herodotum, quam eos, quorum teſtimonio eſt vſus, producam quaſi in forum ad tribunal, exquiſitiusque tamquam in iudicio teſtes admotis quaeſtionibus percunctabor. Dicebant Herodoto, Scythas trans Araxem iuxta Iſſedonas & Maſſagetas coluiſſe: pulſis Scythis Maſſagetas vlteriora Araxis (1) ſub oriente Caſpii maris tenuiſſe e regione Iſſedonum, qua in latiſſimam planitiem terra ſe diffundit. (2) Eum Araxem dicebant cum Iſtro de magnitudine certare & in oſtiis multas amplecti inſulas, Lesbo aequales magnitudine. Nihil horum ad Araxem Mediae conuenit: non Maſſagetarum ſitus, non magnitudo fluminis, non tot et tantae in oſtiis inſulæ. Omnia autem ad Volgam. Ad Orientem Maſſagetae veteres: longitudo fluminis Iſtrum tertia parte ſuperat: oſtia ad octoginta et amplius, (3) quae inſulas

(10) *L IV.* 99. (1) *L. I.* 201. (2) *L. I.* 202. (3) *Nicol. Vitſenii Noord en Ooſt Tartarye f.* 700.

ſulas ingentes circumdant. Quod ait Herodotus: Ἀράξης λέγεται καὶ μέζων καὶ ἐλάσσων εἶναι τοῦ Ἴστρου. *Araxes et maior et minor eſſe Iſtro dicitur*, id quoque confirmat, de duobus fluuiis eum inaudiuiſſe, quorum alter, hic Volga maior Iſtro, alter, qui nunc quoque *Rus*, minor fuit. Et fuiſſe vtique Volgae vetuſtis temporibus nomen *Araxes* ſiue *Rus*, *Ros*, & *Rhas*, ſatis exploratum habeo. Onomacritus & incertus auctor peripli Ponti Euxini Tanaim dicunt ex Araxe flumine in Maeotin exonerari. Ariſtoteles quoque in meteorologicis (4) auctores habet, ἐκ Παρνάσου (ex Paropamiſo dicere ſe putat) maximo omnium ad orientem hibernum monte, Bactrium, Choaſpen & Araxem fluere τούτου δὲ ὁ Τάναϊς ἀποσχίζεται, μέρος ὤν, εἰς τὴν Μαιῶτιν λίμνην, *ab hoc Araxe Tanais diuiſus (pars enim eius eſt) in Maeotin paludem exoneratur*. Ortus eſt error e Tanais & Araxis vicinitate. Accedit Agathemerus (5) qui *Iaxartem*, *Oxum*, *Rhymnum*, *Rhos* (qui eſt Mediae *Araxes*) *Cyrum* (qui eſt *Kur*, cum hoc Araxe ſe miſcens) & denique *Araxem* Caſpio mari infundi ſcribit. Quis non videt, eum ab oriente littora Caſpia obire, donec ad ſeptemtrionem deſinit in Volga? Claudius autem Ptolemaeus Volgam vocat Ῥᾶ *Rha*, quod nomen adhuc frequenter in ore habent Rutheni, ut ne ab aetate quidem et temporum populorumque miris conuerſionibus obliterari potuerit. Inter caetera ſic loquitur Claudius: ἔστι καὶ ἑτέρα τοῦ Ῥᾶ ποταμοῦ ἐκβολὴ πλησιάζουσα τῇ τοῦ Ταναΐδος. Voſſius ad Melam in eo emendat vocem ἐκβολη & reſcribit

Ddd 2 ἐπι-

(4) *L. I. c.* 13. (5) *p.* 235 *ed. Gron.*

ἐπιστροφή. Sed relinquendus eſt ſuus Ptolemaeo error, qui Volgam & Tanaim miſceri atque orientalem quidem Volgae alueum in Caſpium mare, occidentalem autem in Tanaim exonerari credidit. Duo quoque fluminis illius oſtia Pomponius Mela habet (7) ſed in Caſpio tantum mari: *multi*, inquit, *in Caſpio ſinu magni paruique amnes fluunt: ſed, qui famam habet, ex Cerauniis montibus vno alueo deſcendit, duobus exit in Caſpium, Rha.* Ammianus Marcellinus (8) *huic Tanai Rha vicinus eſt, amnis, in cuius ſuperciliis quaedam vegetabilis eiusdem nominis gignitur radix, proſiciens ad vſus multiplices medelarum.* De *Rha* barbaro eum loqui intelligo. Videtur autem illud nomen *Rhos* et *Rha* eique alia ſimilia ex antiqua mortalium communique lingua ad Scythas aliosque populos permanaſſe, quo fluuium dixere. Apud Arabas eſt *Roha*, apud Turcas et Perſas eſt *Rud*, apud Ruthenos рѣка *Reca.* Quae fluminis adpellationes, et apud Graecos PEIN et fortaſſis Rhenus, Rhodanus, Rhaduna apud Gedanum, tum Eridanus ſeu Rhudon Ptolemaei et Marciani Heracleotae,(nunc Duna apud Rigam) et Ruſſa in Pruſſia, non niſi reliquiae priſcae linguae ſunt. Eſt eodem referendus Ἐρις fluuius apud Lycophronem, (9) cum Caſſandra canit Amazonas Ἐριν Lagmum Telamum & Thermodontem reliquiſſe et inuaſiſſe Athenienſes. Vbi Ioannes Tzetzes Ἐρις Λάγμος Τήλαμος Θερμώδων, ποταμοὶ Σκυθίας. Ex vicinitate Thermodontis Eris ille cognoſcitur ſitus fuiſſe in Ponto. Xenophonti eſt

(7) *III. c.* 9. (8) *L.* XXII. *c.* 16. (9) *v.* 1333.

ti eſt Ιϱις (10) & ex eo fortaſſis, etiam Plinio. In Meſopotamia duo flumina fuere, quae Arabes appellauere *Roba*, hoc eſt nihil aliud quam *fluuios*. Alter apud Edeſſam quem Scirtum Macedones coloni dixere, alter eo inferior, qui a Ptolemaeo et nunc ab Arabibus Chaboras dicitur. Ex illo fecere Graeci Καλλιϱόην, ut in hiſtoria Edeſſena oſtendi, ex hoc ipſe Xenophon (1) fecit Araxem, alium vtique ab Araxe Mediae, quem Xenophon non attigit. Manſit etiam poſtea corruptum Araxis nomen. Nam geographus Arabs, quem Ioſephus Scaliger inſpexit (2) Carceſiam vrbem ait allui a flumine

الهرياس المسمى الخبور

Al Harias cognomento Al Chabor. Harias eſt ab *Araxe* Graecorum in Meſopotamia, *Araxes*, ab *Roba*. Graecarum autem aurium tam admirabile fuit faſtidium, vt barbaros vocabulorum ſonos non ferrent. Itaque ſeu noua nomina gentium locorum hominumque e lingua ſua effingebant, ſeu barbara ita ori aurique Graecae aptabant, vt vix tenue remaneret veſtigium, vnde eſſent ducta. De ea conſuetudine Plato in Cratylo diſputat. Is quoque in Timaeo vocabula Atlantici ſermonis retinere non audet, niſi Graece enuntiata. Sed vaga fuit enunciandi talia lubido, nullis definita praeceptis, vt in primis e Perſicis et Medicis et Armenicis nominibus intelligi poteſt.

Eſt igitur Volga, ille Araxes, cuius ad orientem priſci Scythae vicini Maſſagetis et Iſſedonibus degerunt.

 Mas-

(10) ἐν ἀναβάσει *L. V. c. 6.* (1) *ib. L. I. c. 4.* (2) *De emendat. temp. f.* 399.

Maſſagetas enim non modo Herodotus, ſed etiam omnis veterum turba ad borapelioten Caſpii maris collocat. Laonicus Chalcocondylas ad ſeptemtrionem Caſpii maris ponit, (3) et praeterea adiicit, eos ante id tempus ad alteram Araxis ripam egiſſe, nunc autem traiecto flumine citeriorem partem tenere. Quis non videt Araxem illum eſſe Volgam? ni cui viſum ſit quoque, meridie non lucere. Hic fluuius cum latiſſime pateret et a multis gentibus accoleretur, mirum non eſt, ſi quosdam ſuo inſigniuit nomine. Vt nunc Bulgari a Volga profecti, nomen a fluuio tractum conſeruant, ita Ruſſos opinor ab eodem dictos et Roxalanos, quaſi Alanos ad Ruſſum fluuium. Ptolemaei Βορȣσκοι, quaſi *ad Ruſſum* populi.

Hunc quoque illum eſſe Araxem iudico, ad quem contra Maſſagetas male res geſſit Cyrus. Herodotus, cum audiuiſſet, Cyrum transmiſſo Araxe petiiſſe Maſſagetas et petiiſſe a Babylone, illum ipſum in Media Araxem dici putauit in Clio. Qui eum non ſatis intellexere, Araxem alium ſibi quaeſiuere ſub oriente, vt traiecto eo, petere Maſſagetas poſſet Cyrus. Iſaacus Voſſius Oxum ſibi elegit, quem Chriſtophorus Cellarius ſecutus eſt. Nihil tamen habent, quod pro ea ſententia pugnet, et longius ab Oxo ſiti fuere Maſſagetae, quocirca veteres quidam, teſte Plinio, (3) vltra Iaxartem poſuere aras Cyri, veluti ille eſſet Araxes. Iaxartem autem Scythae, vt ait Plinius, (4) ſeu quicumque alii fluminis accolae, *Silyn* vocarunt, aut fortaſſis *Sihyn* quod nomen adhuc permanet. Neque tamen etiam pro Iaxarte aliqua idonea veroſimilitudo

(3) *f. 62. et 67. ed. Pariſ.* (4) **L. VI. c. 16.**

litudo pugnat. Profectus autem eſt Cyrus in hanc expeditionem, vt nobis videtur, non contra ſolos Maſſagetas, ſed in primis contra Scythas. Haeſit enim ſemper Regum Perſarum animis, quam impotenter Scythae deuictis Medis in Aſia ſuperiori egiſſent. Atque illud tot bellorum initium eſt ab Herodoto indicatum, qui ſumma cura hoc egit, vt oſtenderet, per quas cauſſas bella ex bellis ſeminata fuerint. Babylonem Cyrus cepit ſecundum Vſſerii rationes anno periodi Iulianae 4176. Anno vno poſt et paullo amplius, ſi Xenophonti credimus, gentes a Syria vsque ad mare Erythraeum ſibi ſubiecit. Inde adhuc ſunt anni minimum ſeptem vsque ad extrema Cyri. Hoc omni tempore tum in Aſia minori, tum ad Caucaſum & in Scythia res potuit gerere, donec apertis per arma regionibus, traiecto nauibus et per pontem a ſe factum, Volga, Maſſagetas eſt adortus.

Quo autem tempore Scythae Araxem traiecerint et Tanaim, oſtendam poſtea. Nam id potius & prius quaerendum eſt, quibus regionum ſpatiis Herodoti aetate coluerint.

DE

DE SCYTHIAE SITV, QVALIS FVIT SVB AETATEM HERODOTI.

Auctore

T. S. Bayero.

M. Maio. 1726.

QVi primi omnium Graecorum, quos ex veteris memoriae miſerabili ſtrage relictos accepimus, de Scythis aliquid prodiderunt, Onomacritus et Aeſchylus, poſt Anacharſidis Scythae in Graeciam aduentum ſcripſere. Is, vt Herodotus teſtatur, Gnuri filius, Saulii regis Scytharum frater fuit: Gnurus autem Lyci, Lycus Spargapithis. Quamquam Samoſatenſis in Scytha, patrem non Gnurum, ſed Daucetam, neſcio quo auctore, citat, et Diogenes Laertius fratrem Caduidem regem. Athenas venit, teſte Soſicrate Rhodio et Ὀλυμπιάδων ἀναγραφῇ Olympiadis XLVIII. anno primo, archonte Eucrate, qui anno vno interiecto, Soloni ſucceſſerat: annis admodum XVII, poſtquam Aſiae imperio exciderunt Scythae et ſeruile bellum reperere domi. Ex quo opinor factum, vt nullae res Scytharum, ita Graecorum monumentis celebrarentur, quam quod de bello ciuili recens geſto ab Anacharſide audiuerant. Erat autem Graeca natus matre: vt potius credam Diogeni Laertio, Graece locutum, quam Luciano aut commentitiis Anacharſidis epiſtolis,

non

non niſi Scythicae linguae facultatem habuiſſe. Situs tamen locorum Scythicorum nondum planiſſime explorari potuiſſe videntur. Anacharſin Athenis aut in alia Graeciae vrbe cognoſcere poterat Anaximander Mileſius, haud minor viginti annis. Is inter primos ab Agathemero (1) refertur, qui geographiam tabulis comprehenderunt. Ab eo fortaſſis Onomacritus ſua mutuatus eſt, cum argonautica, Orphei nomine, Athenis Olymp. LXV. ederet. Pindarus quidem Abarin quoque, quem alii Scytham, alii Hyperboreum putant fuiſſe, ſub Croeſi temporibus Athenas veniſſe cecinit, ſed videtur Anacharſin habuiſſe in animo, qui iis fere temporibus in vrbe fuit. Nec dubito, quin illius auctoritate decepti fuerint Euſebius & Hieronymus, cum ad Olymp. LIV. annum II. et initia Croeſi, Abarin ponunt e Scythia veniſſe in Graeciam. Hippoſtratus III. Olympiade, alii apud Harpocrationem Olymp. XXI. eo veniſſe contendunt. Immo Firmicus Maternus, vt eum Ioſephus Scaliger et Mauſſacus emendarunt, Troianis temporibus aequalem facit. His autem temporibus nulli Scythae noti eſſe potuerunt, vt cum Herodoto, Harpocratione et ſcholiaſta Ariſtophanis ἱππέων malim Abarin Hyperboreum dici, atque ex Graecis ad Pontum coloniis repetere, quos ego Hyperboreos in Delum et Athenas ſacrificia legatosque miſiſſe cenſeo, vt in alia diſſertatione poſtea oſtendam. Niſi Herodoti Melpomene potius vera nobis cecinit, Abarim illum inficetam eſſe fabulam. Anacharſin vtique nullus Scytha videtur ſecutus

(1) *p. 1. ed. Hudſon.*

tus in Graeciam, ſi eum frater in nemore Graecis ſacris operantem, odio externarum religionum ſagittis, traiecit: quamquam me non fugit, alios auctores eſſe, ad centum vsque annos vitam produxiſſe Anacharſin. In Onomacrito autem, ſiue ab Anaximandro, ſiue ab alio acceperit, multa ieiuna et futilia ſunt, vt in ignotis adhuc regionibus et populis. Quaedam tamen, vt explorata, ab Herodotea narratione propius abſunt. Nam quoad Onomacriti heroes curſum nauigationis per Ponti littora meridionalia peragunt, nota et vera locorum nomina legimus: cum autem ad occidentem et orientem flectunt iter, tum nec Amazones, nec Tauri ſuis in ſedibus colunt, et ab Araxe fluuio ſcaturigines Thermodontis, Phaſidis Tanaisque deriuantur, quod in tanta antiquitate et longinquitate, non abhorrente a commentis fluuiorum curſu, ferendum eſt. Ad ſeptemtrionem autem Onomacritus permiſcet omnia, populosque, quos fando audiuerat, hac illac temere proiicit. Quod autem in eo vitium eſt maximum, Maeotin paludem cum mari ſeptemtrionali coniungit perpetuo alueo. Illic ponit Pactos, Arcteos, Lelios crudeles: illic

Τοξοφόρους τε Σκύθας, Ἄρεως πιστοὺς θεράποντας,

& Argonautas per Tauros, Hyperboreos, Nomadas, Caſpios, Riphaeos in oceanum Hyperboreum ſeu Mortuum ad Macrobios ducit & ad Cimmerios intra Riphaeum et Caſpium montem in tenebris viuentes, deinde in Hiberniam perque Herculeum fretum ad columnas Herculis, idque quo magis ſit ridiculum, paucorum dierum decurſu. Haec imperite fingendi licentia patefacit Onomacriti inſcitiam, cui nihil fere praeter nomen Scytharum

vici-

vicinorumque quorundam populorum innotuerat. Itaque cauendum eſt ſedulo, ne hunc hominem ignotis rebus vanisque figmentis oblectantem alios, tamquam bonum et accuratum de illis terris teſtem citemus, vt fecere ante nos nonnulli eruditi viri. Qui ſecundum eum Argonautica ſcripſerunt, non quae gentes reuera antiquiſſimis temporibus iſthic coluerint, ſed quas ſua aetate aut quocunque alio tempore iſthic recenſeri acceperant, ab Argonautis petitas tradiderunt. Itaque in iis maiori etiam opus eſt cautione, quam quae ab illis eruditis viris, quos dixi antea, adhibita eſt, qui diſſonantia in Onomacrito et ceteris argonauticis ſcriptoribus comparando fecere, vt erroribus plena eſſent omnia.

Aeſchylus Onomacrito concinit in Prometheo vincto, Scythas ſupra Maeotin coluiſſe. Sic enim canit:

Καὶ Σκύθης ὅμιλος
Οἳ γᾶς ἔσχατον πόρον ἀμφὶ
Μαιῶτιν ἔχουσι λίμναν
Et Scythica turba,
Quae terrae extremam regionem, circum
Maeotin tenet paludem.

Idem Scytharum regionem in ſolitudinibus collocat et ad oceanum vsque producit, quocum miſceatur Maeotis. Noti iſthic ſunt ei Scythae Nomades

Οἳ πλεκτὰς στέγας
Πεδάρσιοι ναίουσιν ἐπ᾽ εὐκύκλοις ὄχοις
Ἑκηβόλοις τόξοισιν ἐξηρτημένοι
Qui caſas vitiles
Incolunt, ſublimes ſuper rotundis curribus,
Arcubus longe iaculantibus inſtructi.

Noti eidem Chalybes et Amazones et anguſtiae Maeoticae.

Iſta Scythicarum regionum ignoratio manſit vsque ad Darii expeditionem : tum enim per Ionas ceterosque Graeci corporis , qui in exercitu eius erant, inueſtigatum eſt, quodin eum latuerat diem. Ex eorum numero Scylax Caryandenſis circum littora exploratum eſt a Dario miſſus , cuius periplus exſtat. Pontica littora multo ſolertius deſcripſit quam Onomacritus et quaedam eorum tractuum alia, conuenientius Herodoto. Herodotus Scylacem nouerat a Dario Hyſtaſpe ad deſcribenda Aſiae littora miſſum : Europae autem et Scythiae littora eundem obiiſſe non nouerat. Aelius vero Dionyſius Halicarnaſſenſis in libro de Alexandria primo auctor eſt, Sylacem Europae et Scythiae periplum dedicaſſe Dario, vt habet incertus auctor in elogio Scylacis edito primum ab Hoeſchelio. Siue Darii mandato, ſiue priuato conſilio littora illa obierit, ſeu ab aliis nautis tradita tantum conſignauerit (Caryanda autem patria eius, Cariae iuncta fuit, et Carum nauigationes ſunt notiſſimae (2)) nihil tamen eſt verius , quam ad hanc aetatem referri debere eius periplum. Haud ſum ignarus, HenricumDoduellum, quem ego virum ſemper feci maximi, Scylacem hunc longe infra Herodoti aetatem ponere, ſed is neſcio quomodo mihi in tota illa diſputatione , tamquam in ſalo ſine remigio et velis iactari videtur. Quae enim ſunt tanta argumenta, vt eius ſententiam praeferam Iſaaci Voſſii ceterorumque opinioni? Quia, inquit, quaedam in periplo Scylacis leguntur , quae memoriam inferiorum

rum

(2) *L. I. c.* 171.

rum aetatum attingunt. Fateor id ita eſſe, ſed ex iis quaedam acutiſſimi iudicio viri ad Olympiadem CXI. alia ad Olymp. CXVI. nonnulla ad Olymp. CXXXV. referenda ſunt, quod ſex et nonaginta annorum interuallum eſt. E contrario in Scylace reperias certas antiquioris aeui notas. Agnouit id Doduellus quoque in multis et in vno maxime, quod Scylax Tyrum vocat inſulam, quae peninſula poſt Macedonis expeditionem Perſicam fuit. Vixit igitur ante id bellum. Praeterea Sylacem ſcripſiſſe ea aetate neceſſe eſt, cum Africae omnis Aſiaeque littora notiora eſſent, quam Italiae, Galliae, Hiſpaniaeque. Idcirco apud eum Volſci tantum et Campani et Samnites, at Roma nulla, fama vrbis nondum per Graeciam peruulgata. Ex quo mihi res fit ſine controuerſia, cetera aliis temporibus conuenientia, ſcribarum curioſitate allita fuiſſe Sylaci, deinde in librum recepta, vt multis aliis, praeſertim huiusmodi ſcriptoribus accidit. Poſt hoc tempus tantum Athenis cognoſcendi has regiones deſiderium obtinuit, vt optimates conſumerent in foro totos dies, ἐν τοῖς θαύμασι, καὶ πρὸς τὺς ἐκ τῦ Φάσιδος καὶ Βορυσθένυς καταπλέοντας *ſpectandis praeſtigiis et cum iis qui a Phaſide aut Boryſthene adnauigauerant*, vt ab iis cognoſcerent miracula, vt habet apud Athenaeum Ariſtoteles. (3) Haec vero θαύματα peperere inſanas de Scythis fabulas, quo non immerito Heraclidis Abarim retuliſſe videtur Mauſſacus.

At Herodotus alio ingenio fuit, qui cum Olbitis Ponticisque aliis ſic eſt verſatus, vt non omnino fabulas ſper-

(3) *f.* 6.

neret omnes, haud ignarus, in iis nonnumquam veritatis aliquid recondi, tamen, quod eſſet in omni re veriſſimum, ſagaciter inueſtigaret. Quibus igitur in locis ſub Darii expeditionem Scythae degerint, vt ab Herodoto eſt vulgatum, explicabo. Tenuere autem regiones inter Boryſthenem et Tanaim. Ad meridiem illis Tanais, vt noſter ait, nulli vero ad eius vlteriorem ripam Scythae, niſi exules a reliquo corpore et rebelles, ſed longius ad orientem a ripa Tanais reiecti. Iam Herodotus ab Iſtro ad Boryſthenem decem dierum iter eſſe ſcribit, a Boryſthene ad Maeotin paludem decem quoque dierum, ab oriente Scythiae ad occidentem viginti numerat dies, a Ponto totidem ad Melanchlaenos, ad ſeptemtrionem Scythiae oppoſitos. In diem ducena ſtadia numerat. Quem nunc in modum nos expediemus, cum omnis de ſtadiis quaeſtio difficultatibus maximis impedita eſt? Videor mihi viam reperiſſe, qua quam poteſt fieri proxime accedam ad veritatem. Eratoſthenes, vt Strabo auctor eſt, in gradum vnum aequatoris ſtadia Ↄcc dabat, at Claudius Ptolemaeus ex diligenti, vt ait, obſeruatione, tantummodo ſtadia Ↄ. quem magna veterum turba conſequitur. Herodotea ſtadia concordant cum ſtadiis Ptolemaei, vt patet perſpicue, comparantibus Herodoti dimenſiones, quas ſubieci, cum exactiſſimis tabulis Deliſlianis, quas in his terrarum tractibus collocandis ſecuti ſumus. Ait autem Herodotus

Pontum Euxinum latum eſſe qua eſt latiſſimus — 3200 ſtadia

Os

Os Ponti ſeu Boshporum eſſe latum	4
Os Ponti eſſe longum vsque ad Propontidem, admodum	120
Propontidem eſſe latam	500
Et longam	1400

Secundum has igitur Herodoti rationes, in iis regionibus, de quibus quaerimus, in gradum longitudinis vnum ſtadia CCXLVII erunt numeranda, ſingula pedum ſexcentorum, vt Herodotus diſerte poſtulat: ſeu pedes 208200 Nunc dimenſionem Scythiae ad calculum exigemus.

	dies,	*ſtadia,*	*gradus cum pedibus*	
Ab Iſtro ad Boryſthenem	10	2000	5	159000
A Boryſthene ad Maeotin	10	2000	5	159000
Ab oriente ad occidentem Scythiae	20	4000	11	109800
A Ponto ad Melanchlaenos ſeu ſeptemtr.	20	4000	8	5

Duae dimenſiones Herodoteae, quas primo loco poſui, non admodum abhorrent a veritate, ſi ab Iſtro ad Boryſthenem propter littus iter inſtituas, quae cauſſa eſt, vt Maeotis quoque a Boryſthene aequali ſpatio dirimatur. Nam vtrobique, per littorum in interiora recedentium ſinus, curſus interceptus fuit. At in agris Scythicis libero patentique campo, qui nec ſyluis nec montium iugis impediretur, rectum erat iter. In vno ambigi poteſt, cum ab occidente orientem verſus viginti viam dierum eſſe Herodo-

rodotus ſcribit , a quibus quaſi carceribus ſuos curſores in ſtadium hoc emittat. Egregie autem aperit ſententiam ſuam Herodotus, cum Scythiam intra Agathyrſos, Neuros, Androphagos, Melanchlaenos includit. Quod eius dictum niſi in oculis feramus, nusquam cohaerebit res: nunc autem omnia inter ſe optime colligata a nobis comparataque reperietis, vt aut ſic fuiſſe Scythas ſitos putem, aut, quoniam in his nulla tanta eſſe certitudo poteſt, haud longe nos a veritate aberraſſe. Eſt igitur Scythia ſita intra 45. et 57. fere gradum longitudinis, at 47. et 55. gradum latitudinis, e qua coloni transgreſſi Boryſthenem, aliquantum terrarum, vsque ad Tiram occuparunt. Ego vero haud grauate non modo eius Scythiae, ſed et vicinarum gentium, quae ſeu intra huius imperii proximos fines, ſeu aliquanto etiam longius ſitae fuerunt, regiones ex Herodoto exhibebo in tabula.

Primum omnium is ordo eſt fluminum, quae Herodotus habet, (4) Ex Scythia, quinque fluuii decurrentes augebant Iſtrum. Porata, (Ammiano Marcellino Porota,) magnus fluuius, ab oriente deſcendens, ad hoc tempus priſcum nomen retinet. Quis enim ignorat Prutam? Magnus vtique fluuius in quem incidunt Colazinus, Coſmanus, Zuzur, Zur, Baſſenus, Caroccia, Caminea, Caldaruſſa, Zizia, Valemare, Valebratuleni, Moſna, Nirnoua, Calmazuia, Sapuſna, Strimba, Serata orientalis et occidentalis, Cigieza, Larga et Ilana, vt eos nomine recenſet Demetrius Cantemirus princeps eruditiſſimus in hiſtoria Moldauiae MSta. Graeci poſtea nomen

(4) *IV.* 47. 48.

men Poratae Herodoto teſte inflexerunt, vt deprauatum eſſet Πυρετὸς quaſi *Igneum* dicas, vnde Conſtantino Porphyrogenetae eſt Βρῦτος (8) et nunc *Prut*. Tiarantus Herodoti, *Alaut* fluuius eſt. Nam ab Herodoto inter Tiarantum et Poratam tria magna flumina ponuntur, quot vtique inter hunc fluuium et Alautam interſunt. Quo accedit, quod Ptolemaeus quoque Alautam ſuum ſic poſuit. Ex tribus autem Ordiſſus eſt is, qui adhuc nomen vetuſtum retinet: *Argiſcha* enim vocatur. Poſt Herodotum dictus a Graecis Αρδῆσκος, vt adparet e ſcholiis in Heſiodum. (9) Naparis Herodoti eſt *Ialoniza*. Ararus, Ptolemaeo Hieraſtus (quod nomen vetus Prutae fuiſſe Cantemirus putauit) Canſtantino Porphyrogennetae Σέρετος, corrupto veteri vocabulo, nunc quoque *Siretus* et *Moldaua* quibusdam dicitur. Eſt enim fluuius Moldauiae proprius ex vltimis finibus verſus Poloniam profluens atque duobus oſtiis in Danubium ſe exonerans, vndique montibus et ſaltibus cinctus, vt Cantemirus Princeps teſtatur. Secundum hos fluuios Maris nos aduertit, qui adhuc a fontibus ipſis retinet nomen vetus *Maroſch* ſeu *Meriſch*, donec ad Segedinum, amiſſo nomine, Tibiſco miſcetur, quocum in Iſtrum ſe exonerat. Maris autem Herodoto ſeparatur a Scythicis fluminibus, nec nobis memorandus, niſi ad eum Agathyrſos poneret Herodotus. Fluuios, qui ab Haemo et a Thracia exonerantur in Iſtrum, non attingo, quoniam nihil ad propoſitum noſtrum conferunt. Sequitur Tiras, qui apud

(8) *De adminiſtr. imperio f.* 108. *ed. Band.* (9) *p.* 261. *ed. Heinſii.*

Turcas in *Turlae* cognomento aliquantum veteris nominis retinet, Conſtantino Porphyrogennetae et Graecis aliis *Danaſtris*, vnde nunc *Dniſter* dicitur. Oritur e lacu, Scythas a Neuris ſeparante. Ex lacu dico, Herodoti fide, qualiscunque ſcaturigo fluminis ſit. Secundum Tiram eſt Hypanis fluuius, qui nunc *Bog.* Rudbequuius Pripelium eſſe cenſuit: cui alibi ſatisfeciſſe mihi videor. (10) Hypanis oritur e lacu, qui Μήτηρ Ὑπάνιος Herodoto dicitur et in Scythica regione ad occidentem eſt ſitus, iuxta quae loca ἄγριοι ἵπποι λευκοὶ. Oſtium fluminis huius Dio Chryſoſtomus (1) ſic deſcribit: prope a mari efficere ingens ſtagnum, limoſum et tranquillum ſerena tempeſtate; fluuium ipſum eſſe profundum et vehementem, ripam paludoſam, arundine et arboribus obſitam, adeo vt arborum quaedam in ſtagno quoque adpareant, malis nauium ſimiles: iſthic ſalis eſſe copiam. In Hypanim, teſte Herodoto, infunditur paruus et amarus riuus Amaxampes dictus Scythis (quod ille Graecis ἱερὰς ὁδὺς ſignificare ſcribit) qui terminus eſt Alazonum et Scytharum Aratorum. Abeſt autem a mari octingentis ſtadiis: nam quatuor dierum curſu ad mare vsque ab Amaxampe amarus dicitur fluxiſſe Hypanis. Alio loco (2) Ἐξαμπαῖον regionem ponit Herodotus intra Boryſthenem et Hypanim, dicitque ex ea regione fluere Exampen riuum, quem autea Amaxampem vocauerat. Cum ad hunc vsque riuum paene aequali interuallo Hypanis et Tiras fluunt, paullo infra riuum amarum, Tiras in ambitum deflectit et Hypanis quoque diuergit ſecundum Herodotum.

(10) *de numo Rhodio p.* 9. (1) *f.* 437. (2) *f.* 157.

tum. Quae ſigna me induxerunt, vt Amaxampem ea in regione ponerem, vbi nunc fluuiolus *Sinauda* ſitus eſt. Boryſthenes Hypanim excipit, incerto auctori peripli Ponti Euxini Danapris dictus, ex eoque nunc *Dniper* veteri Scythico vocabulo. Poſt Herodotum quidam qui longinquiora, quae comperta non habebant, tradere tamen ſunt auſi, ex montibus, quos Alaunicos vocant, fontes Boryſthenis repetunt. Sed mirandum non eſt, ſi omnium capita fluminum aut in lacubus et paludibus aut in montibus ponuntur a priſcis geographis, ne quid ignorare videantur. Et Boryſthenis quidem fontes Matthias Miechouius Canonicus Cracouienſis annotauit, in Sendomirienſis agri planitie ſcaturire, non in montibus, quales eo in agro ſunt nulli. Boryſthenes fluuius eſt, teſte Herodoto, nulli niſi Nilo ſecundus: puriſſimo alueo labitur et ſata penes ſe foecunda habet ſaliſque copiam in oſtio καὶ κήτεα μεγάλα ἀνάκανθα τὰ Ἀντακαίους καλέουσι, quem piſcem torrent accolae fluminis. Cognoſcebatur Graecis fluuius ab Gerrheo regione, quae quatuordecim nauigatione dierum diſtabat a mari. Ab eadem regioneGerrheo decem dierum via Scythae Aratores ad Boryſthenem colebant, In oſtio Boryſthenes et Hypanis eodem lacu miſcebantur, priusquam in Pontum ſe exonerabant. Oſtiorum vtriusque fluuii latitudo aequalis, lacus ducentorum ſtadiorum tractu porrigebatur. Promontorium, quod eſt extremum, medio inter vtrumque fluuium ſitu, Hippoleon vocabatur, Cereris delubro inſigne. In eo autem promontorio, cuius e regione in mare ſe praecipitabant e lacu flumina, propugnaculum Alectoros (coniux ea Sauromatarum regis fuit) Dionis Chryſoſtomi ae-

tate erat. Ad ortum ſolis Panticape ex lacu quodam a borea fluens Hylaeamque regionem ſtringens infundebatur Boryſtheni. Situm eius iſthic pono, vbi *Samara* nunc eſt, aut paullo infra hunc riuum. Nam Scythae Agricolae, cognati Scytharum Agricolarum ad occidentalem Boryſthenis ripam degentium, a Panticape vndecim itinere dierum, hoc eſt ad Gerrhum vsque colebant. Igitur haud longe a mari Panticape abſuit. Dionyſius vtique Periegetes aliique haud longe a Ponto oſtia eius deſcribunt, ex quo opinor factum, vt quidam Panticapen comparantes cum Hypani, dicerent, infra Olbiam ſeu Boryſthenem vrbem Boryſtheneis miſceri fluctibus. (3) Secundum Panticapen Hypacris ex lacu per medios Scythas Nomadas delapſus a dextero relinquens Hylaeos, ad Cercinitin vrbem infundebatur Ponto. Gerrhus autem fluuius in ipſis fontibus regionem Gerrhum attingens, medius inter Scythas Nomadas & Regios fluebat, donec in Hypacrin aquas fundebat ſuas. Apud Claudium Ptolemaeum confuſa ſunt omnia: Hypanis aliquot gradibus orientalior Boryſthene deſcribitur, vt poſſis ex eo ſuſpicari, Hypacrin eſſe in Ptolemaeo ſcribendum. Diuerſus ab eo apud Ptolemaeum eſt Cercinitis fluuius, qui in ſinum Cercinitin Pontumque ſe exonerat, vt de Gerrho et Hypacri Herodotus habet: at Gerrhus a Ptolemaeo longe hinc reiicitur ad orientem, veluti qui miſceatur Maeoti. Quod ne quis adeo miretur, in Ptolemaeo ſciat numeros graduum eſſe deprauatos. Si enim Alexandrinum geographum recte inſpicias, Hypanis ad occi-

(3) *Plinius L. IV. c. 12.*

occidentem Boryſthenis collocatur, diſertis verbis. Eſt ergo Cercinitis Ptolemaei, idem, qui erat Herodoti Hypacris. Qui autem factum ſit, vt Gerrhus in Maeotin defluere videretur Ptolemaeo, qui Herodoti teſtimonio Hypacri & Ponto miſcebatur, illum ſcrupulum facile tollam e Plinii egregio quidem, ſed corrupto loco (4) *Sinus*, inquit, *Carcinitis appellatur, flumen Pacyris, a tergo lacus Buges foſſa emiſſus in mare. Ipſe Buges a Coreto, Maeotis lacus ſinu, petroſo diſcluditur dorſo. Recipit amnes, Gerrhum, Hypanim, ex diuerſo venientes tractu. Nam Gerrhus Baſilidas et Nomadas ſeparat: Hypanis per Nomadas et Hylaeos fluit, manu facto alueo in Bugem, naturali in Coretum.* Vbi Pacyrin eſſe Herodoti Hypacrin, Harduinus iam annotauit: Bugen eſſe Βύκην λίμνην, Bycen Flacci et Bucen Melae idem monuit. Sed manet ſcrupulus, quod Coretum non animaduertit eſſe legendum *Cercinitin*, idque ex Herodoto, quem Plinius hoc loco ſecutus eſt. Nam qui poterat Gerrhus ad orientem in Bycen lacum, Hypacaris ab occidente in Coretum ſeu vltra Bycen exonerari et *duo tamen flumina*, vt Mela loquitur, *vno oſtio effluere, diuerſis fontibus & aliunde dilapſa*, et quidem influere in Cercinitin, vt non obſcure Plinius innuit. Ita igitur eſt: Hypacris et Gerrhus vno oſtio in Cercinitin et Pontum voluebantur, ducta tamen vsque in Byzen & Maeotin paludem foſſa, per quam altero oſtio, ſed manu facto, exonerabantur. Haec eſt celebris illa foſſa, quam a vernis Scytharum ductam Herodotus commemorat. Conſtantinus

(4) *L. IV. c. 12.*

tinus Porphyrogenneta ait (5) illam ſua aetate foſſam terra obrutam fuiſſe κατεχώθη ἡ ἀυτὴ σȣδα καὶ ἐς δάσος ἐγένετο πολύ. Tanais vltimus fluuiorum Scythicorum, nunc *Tan* & *Don*, ἐκ λίμνης μεγάλης, Herodoto teſte, fluebat, (quae λίμνη nunc *Juan* nomen habet) & praecipitabat ſe in Maeotin. Sed perquam eſt obſcurum, quos Herodotus dicat fluuios *Lycum Oarum et Syrgin* in Maeotin incidere. Lycum etiam Ptolemaeus habet ad occidentem, tribus citeriorem gradibus Tanai, itaque forte eſt fluuius *Silik*, qui aliquid veteris nominis retinuit, niſi illud ipſum vetus nomen eſt, ex quo Graeci pro conſuetudine ſua inflexo fecere Lycum, vt minus barbare ſonaret. Oarus autem, ſi eſt Ptolemaei Agarus, rationes Herodoti turbat: eſſet enim ad occidentem Lyci ponendus. Nunc obſcurum eſt quidem, quo in loco eum poſitum fuiſſe oporteat, certum eſt tamen, inter Lycum & Tanaim ab Herodoto collocari. Syrgis alibi Υεγις dictus Herodoto (6) influit in Tanaim. Neceſſe eſt igitur eſſe eum, quem Tanaim minorem vocant & *Sevierſky*, quod veſtigium veteris eſt vocabuli. Haec flumina Herodotus dicit a Thyſſagetis fluere; (7) non vtique ex ipſa Thyſſagetarum terra, ſed ex vicina regione, nam paullo poſtquam id dixerat, Oarum fluuium in deſertis ponit, quae infra Thyſſagetas, ſeu ad meridiem iis erant. Reliquus eſt Araxes ſeu Volga, vt ſupra demonſtraui. Duo maria Pontus Euxinus & Caſpium mare notiora ſunt, quam vt de iis quidquam dicendum

(5) *l. c. f.* 113. (6) *L. VI. c.* 123. (7) *L. IV.* 123.

dum eſſe videatur. Ariſteas ille Proconneſius Νοτίην θάλασσαν vocat Pontum, *auſtralem* Scythis reſpicientibus: at Herodotus Βορηίην, a Graecia. In Herodoto id quoque ſummam hominis accurationem & fidem indicat, quod Caſpium mare non vt noſtrum nonnulli quadratum, ſed quod paucis ante annis deprehenſum eſt a Ruthenis, longius porrectum prodit, pro portione latitudinis. Ad occidentem Caſpii maris Caucaſum collocat, ad orientem vero immenſam planitiem, cuius partem non minimam Maſſagetae teneant. Haec planities celebratiſſima eſt apud Arabas Perſasque ſcriptores nomine *Kaphgjak* et *Daſcht*, quod *planitiem* ſignificat. Deſcribit denique, ſine nomine tamen, montes ad remotiorem orientem. Volga enim ad occidentem, altiori ripa includitur, vnde ea regio *Nagorna*, id eſt, *montana* hodie dicitur. Nequaquam iſthic montes ſunt, ſed planities altiori cum ripa. Ad orientem autem ingens eſt planities, quae regio idcirco *Lugavoia* hoc eſt *campeſtris* vocatur. Sunt igitur montes illi ab Herodoto memorati, nulli alii, quam qui nunc dicuntur Vergaturii, olim *Riphaei* dicti.

Poſtquam haec, quae nulla vis temporum, nulla fortunae iniuria labefactare potuit, maria, flumina montes, planitiem, ſuis in locis terminaui, his vtar adiumentis ad deſcribendas ſuis regionibus gentes. Timonax primo de Scythis libro (8) quinquaginta diuerſas Scytharum gentes eſſe ſcribit. Cum autem incertum eſt, qua aetate Timonax haec ſcripſerit, ſitne hoc de ſuae aetatis populis intelligendum, an ita a ſupe-

(8) *ap. Schol. Apollonii Rhodii L. IV. v.* 321.

ſuperiorum temporum ſcriptoribus acceperit, nihil compendii ex eius teſtimonio facio. Sequar igitur naturae quaſi ordinem, ac poſitus populorum ex Herodoto definiam, confirmaturus opinionem meam idoneis argumentis, vbi opus eſſe videbitur. Iam ab Iſtro, in littore Ponti Tiritae occurrunt iuxta oſtia Tirae, vbi nunc Bielogrodum et Butziaki populi. Mediterranea Scythae Aratores tenuere a fluuio Tiaranto vsque ad Tiram, quos fluuios Herodotus idcirco Scythiae annumerauit. Tenuere igitur Valachiam, Moldauiam et exiguum tractum Tranſyluaniae. Magis ad occidentem erant Agathyrſi, gens et ipſa a Scythis profecta, vltra Marin fluuium, hoc eſt in Tranſyluania occidentali. Transgreſſis Tiram, ad littus Callipidae et ſupra eos Alazones, vtrique intra Tiram et Hypanim. Alazonum ſitus certioribus notis intelligitur, quam Callipidarum. Nam mater Hypanis ſecundum Herodotum diſcernit Alazonas a Scythis: ad orientem, Alazonum fines ſunt e regione Amaxampes. Relinquitur nunc regio ad mare vsque Callipidis iuxta Olbitas, vt Halicarnaſſenſis habet. Olbitae populi ἐπὶ τὸν Ὕπανιν *ſupra Hypanim*, Alazones παρὰ τὸν Ὕπανιν *ad Hypanim*, vtrique ad occidentem Olbiae vrbis, Alazones tamen borealiores Callipidis. Ergo Alazones in palatinatus Podoliae meridionali parte ad Caminiecum et in Braclauienſi, qua inter Bogum et Niſterum porrigitur, Callipidae vero in orientali Braclauienſium tractu et in Ozacouienſi agro. Intra Hypanim et Boryſthenem Olbitae Graeca colonia, vbi nunc *Dzike Pole* campi deſerti et Ozacouienſis agri aliqua pars eſt. Vlteriora inſederant Scythae Ἀροτῆρες Aratores, cognati Scythis,

quos

quos ſupra in Valachia et Moldauia conſtitui, tum neceſſitudine proxima tum morum ſimilitudine. Dirempta erat vtriusque quaſi Scytharum Aratorum corporis coniunctio, ad ſeptemtrionem apud fontes Tirae per Neuros, ab Alazonibus per fontem Hypanim ipſum, vsque ad Hamaxampen. Gerrhus ad Boryſthenis fluuii orientem regio, aberat a mari quatuordecim dierum iter. Ab ea regione decem dierum itinere, Scythae Agricolae colebant vsque ad Olbitas. Incoluere igitur palatinatum Braclauienſem, quidquid regionum a fontibus Bogi ad Kiouiam vsque inter Boryſthenem et Hypanim eſt, praeterquam quod ad confluentes vtriusque fluminis Olbitae coluere. Neuri a fontibus Tirae ſupra Scythas Aratores vsque ad Boryſthenem egerunt, in parte palatinatus Leopolienſis Belzenſis et Volhynienſis orientali. Quae regio ab iis eſt Neuris dicta. (9) Magis ad occidentem Geloni et Budini, vbi nunc Chelmenſis et Breſcianenſis palatinatus eſt. Antiquitus Neuri ad orientem Boryſthenis ſedes habuerunt, ſupra Scythas Agricolas, (10) Νευροὶ ſeu Νευρῖται dicti Graecis ſcriptoribus. (1) Sed vna γενεᾷ ante Darii expeditionem, quoniam tanta vis ſerpentium ex eorum terra naſcebatur et a ſeptemptrione e ſolitudine adueniebat, vt perſiſtere amplius ea in regione non poſſent, ad Budinos commigrarunt, a quibus in vicinitatem agrorum admiſſi ſunt. Anno periodi Iulianae 4199 Babylonem recuperauit Darius atque ex eo tempore profectus ad bellum Scythicum, vt Herodotus

Ggg ini-

(9) *Herodotus L. IV. c.* 51. (10) *ib. c.* 105. (1) *Euſtathius ad Dionyſii v.* 310.

initio Melpomenes teſtatur. Vnam γενεὰν ab annis tribus et viginti deſcribere videtur Herodotus, (2) vsque ad annos quatuor et triginta. Ergo Neuri circiter annum periodi Iulianae 4176 aut 4165 traiecerunt Boryſthenem. Nihil tamen addit Herodotus, ex quo ſatis conſtet, vbi Neuri antea coluerint, ſeu vbi ſuas Geloni Budinique habuerint ſedes. Ego quibus rationibus inductus ſuis eos locis poſuerim, dicam. Budini, magna gens, Scythicae ſtirpis fuere, pulſi autem priſcis temporibus a ceteris ſui corporis, ex Scythia ad occidentem Boryſthenis conceſſerunt. Ex eo enim nata eſt fabula Graecorum de Gelono et Agathyrſo fratribus Scythia pulſis, quae ab Herodoto commemoratur. Vt autem Agathyrſi ad occidentem, ita Budini eodem ſe receperunt. Geloni autem Graeca colonia, teſte Herodoto, miſti Budinis, partem quiddam Graecae conſuetudinis retinuere, partem adſciuere a barbaris mores Scythicos. Ex ea re euenit, vt Budini Gelonorum quoque nomine cierentur. Perperam vero hoc, iudice Herodoto, cum diuerſae ſtirpis, diuerſorum morum eſſent Geloni miſtaque Graecis et Scythicis lingua vterentur, Budini tantum Scythica; cum Geloni agrum colerent, hortos haberent, vrbesque frequentarent, Budini autem tantummodo pecuariae rei operam darent. Ex ea tamen confuſione fabula eſt excuſa de Gelono, tamquam Scythicae familiae patre, cum nihil ad Budinos pertineret, nedum ad Scythas. Vrbs

(2) *Nam L. I. c. 7. in duas et viginti* γενεὰς ἀνδρῶν *nondum integras numerat annos* 505. *et L. II. c.* 42. *ait tres* γενεὰς *efficere annos centum.*

Vrbs Gelonus in Budinis ſita, Gelonis illis cognomentum originemque debuit. Muro circumdata fuit, cuius ſingula latera triginta ſtadiorum erant, aedes omnes e lateribus, templa deorum Graecorum et arae, ſimulacra autem lignea. Stephanus Byzantius vrbem in Sarmatis ponit: Γελωνοὶ πόλις Σαρματίας. Haec Budinorum et Neurorum migratio memorabilis eſt in ſeptemtrionali hiſtoria. Nam, vt ex mythologis ſeptemtrionalibus intelligimus, ab eo tempore Odinus primus et Fenni, ſeu Neuri et Budini profecti ſunt ad ſinum Bothnicum et in ipſam Scandinauiam. Ergo Neuri coluere antea ad Deſnam fluuium, poſtea vero in imo pede Lithuaniae et parte quadam Volhyniae, Budini autem et Geloni in Poleſiae finibus. Supra Neuros et Budinos Herodotus deſerta ponit ad ſeptemtrionem, interſerens, quantum conſtaret ſibi. Nam, vt habet in Theſeo Plutarchus, qui veterum ſitus regionum deſcribebant, ſi qua fugerent cognitionem eorum, arenis et ſiccitate ſqualere agros, limoſas eſſe paludes et Scythica iuga et mare glaciatum fingebant, ne in tabulis inane ſpatium pro incomperto relinqueretur. Venedi tamen et Electrides inſulae ad mare Balthicum et Eridanus, qui nunc Duna eſt ad Rigam, nota fuere Herodoto nomina, ſicuti alibi nobis dictum eſt. (3)

Vltra Boryſthenem ad littus, Hylaea eſt regio, quae a Panticape et Hypacri includitur, ſola totius Scythiae ſylveſtris. Nunc iſthic locorum Tattaria Minor eſt. Supra eum tractum Scythae Γεωργοὶ ſeu Agricolae, trium

Ggg 2 iti-

(3) *V. diſſertationem de numo Rhodio*

itinere dierum, iuxta Panticapen porrecti in orientem. et Boryſthene aduerſo vndecim dierum, itaque fere ad fluuium vſque, quem Deſnam nunc vocant, in tractibus Vcraniae orientalis. Iſthic Gerrhus regio et ſepulcra regum Scythicorum erant. Supra vero ἔρημος ἐπὶ πολλὸν *ingens ſolitudo* & vltra eam Androphagi ἔθνος ἴδιον καὶ ὀυδαμῶς Σκυθικὸν, *gens peculiaris et minime Scythica*, in agri Smolenſcenſis Vitepcenſisque tractibus. Poſtea iam ſola et inculta loca, ὅσα ἡμεῖς ἴδμεν *quantum ſcimus*, inquit Herodotus. Traiecto Panticape, Scythae Nomades iuxta Gerrhum fluuium ad ſeptemtrionem vergunt, pars et ad occidentem Hypacris ſita. In Cherſoneſo Tauri colebant magnam partem ad occidentem, nam orientem peninſulae Scythae Regii Αριςοι ſeu Optumi dicti tenebant, qui inde vſque ab hac regione ad Gerrhum et Cercinitin ſinum, vltraque foſſam e Gerrho ductam in Bycen, boream verſus ad lacum, ex quo Tanais oritur, atque ad orientem ad oſtia Tanais ſe porrigebant, quas regiones nunc Tattari Crimmenſes, Nogaici, Coſacique incolunt. Supra Scythas Regios Melanchlaeni, gens minime Scythica in agro Moſquenſi vicinoque ad orientem tractu. Quod ad boream pergebat magis, lacubus, paludibus et deſertis ab Herodoto repletum. Plutarchus, (5) ab his, qui Scythiam et Thraciam peragrauerant, frequentes lacus et paludes iis in locis reperiri compererat, ex quo Poſidonius frigoris vehementiam per has regiones oriri credidit. Satis frigide hoc, ut opinor, Poſidonius. Vltra lacus et deſerta πτερὰ κεχυμένα *plumas effuſas* aerem obtinere fere-

(5) *T. II. ſ.* 951.

rebant, ut proſpectus iter facientium interciperetur: quod de niuis copia Herodotus interpretatur. Poſteritas tamen huic Scytharum ioco indulſit, quae Pterophoron regionem appellauit, *ab aſſiduo niuis caſu, pinnarum ſimilitudine*, vt ait Plinius. (6) Regionem ad Maeotin, per quam Lycus et Oarus fluunt, Maeotida vocat Herodotus. Vltra Tanaim in intimo ſinu Λάξιοι aut potius Λάζιοι Sauromatae colebant. Intimus ſinus eſt, qua Maeotis longiſſime recedit intra Aſiae littora, vbi Tanaim accipit. Hi Lazii Sauromatae boream verſus coluere quindecim dierum via. Quo minus ad ſtadia hos dies comparem, obſtaculo mihi eſt, quod, cum omnis ea regio montana eſt, plura in gradum vnum ſtadia et incerto numero conſumuntur. Vt, cum Herodotus a Maeoti ad Phaſin triginta dierum iter eſſe dicit, id vero quatuor admodum graduum ſpatium eſt, per montes et divertigia viarum, cum in planitie triginta dies gradus duodecim efficerent Herodoto. Poſui itaque Lazios eo in loco vbi multis poſt Herodotum temporibus coluerunt. Herodotus (7) hic errauit, cum λαξίους παρὰ τὴν λάξιν ſeu ſortitionem, neſcio quam, dictos eſſe, opinatus eſt. Nam veluti ad hoc ἔτυμον ludens δευτέραν τὴν λάξιν nactos ait Budinos, ſupra Lazios, magis ad boream. Amazonas Herodotus ſcribit profectas a Sarmatis iuxta Iſtrum et Ponti Maeotisque littora ad ſeptemtrionem, apud Cremnos excenſionem feciſſe, et praedatorum more emenſas ſpatium, quod a Cremnis ad oſtia Tanais eſt, ad ſeptemtrionem conſediſſe et commiſtas poſtea cum Scythis, conſilium cepiſſe traiiciendi Tanaim. (8) Hic ſedes poſuere ſuas inter Lazios

(6) *L. IV. c.* 12. (7) *L. IV.* 21. (8) *Herod. L. IV. c.* 110.

et Budinos, vtrisque ad meridiem. Lingua vſae ſunt Sarmatica: Scythicam aegre didicere a Budinis, quorum concubitus petebant, ita vt σολοικίζειν dicantur Herodoto. Supra Budinos ad boream deſertum eſt ſeptem diebus continuatum, videlicet a Syrgi fluuio et ſcaturigine Lyci atque Oari fluuiorum. Altius deſerto illo Thyſſagetae, Valerio Flacco Thyrſagetae, populus magnus, nec a Scythica ſtirpe, & cum iis Iyrcae, iisdem in tractibus colebant, apelioten verſus. Orientaliores his Scythae Rebelles ſeu Exules, qui a Regiis Scythis profugerant. Omnis eorum regio πεδιὰς καὶ βαθύγεως *campeſtris.* A Scythis Exulibus incipiebat ſcrupea & confragoſa regio, quae denique in excelſos montes ſurgebat. Iam in his regionibus montes ſunt nulli, niſi vltra Volgam Riphaei, quos nunc Vergaturios vocant. Hi nobis in ordinando ſitu illarum gentium pro cynoſura erunt. Eſt quidem tota ripa occidentalis Volgae dicta *Nagorna* ſeu *montana*: ſed qui eo in fluuio nauigarunt, montes nullos viderunt, tantummodo ripam altiorem, cum orientalis ripa paluſtris eſt et vna ingens planities. Ergo montes praeter Riphaeos, reliqui ſunt nulli. Sub radicibus horum montium Argippaei ab Herodoto ponuntur, iidem Sacri dicti et Calui a caluitie, quam et viri & mulieres ab incunabulis perpetuo ſeruarunt. Hi Calui καὶ σιμοὶ καὶ γένεια ἔχοντες μεγάλα, iuris aequique periti legumque magiſtri, inuiolabiles non armis, quae nulla habent, ſed religione omnium circa eos populorum. Ad eos Scythae et Graeci mercatores a Boryſthene et Ponto omni commeabant. Scythae ad eos ſe proficiſci dicebant, per ſeptem interpretes et linguas. Neceſſe eſt

igi-

igitur, multos populos minores diuerſarum ſtirpium interiectos fuiſſe, qui nunc ignorantur. Vltra Argippaeos ad boream nemo peruenit ob altitudinem montium, quorum ad radices Argippaei agebant. Argippaei ferebant, intra eos montes colere Aegipodas, vltraque eſſe, qui ſex menſes dormiant, quod extremam indicat ſeptemtrionem. Ad orientem Argippaeorum Arimaſpi erant, ita, vt his quoque eſſent ad boream Aegipodes et Gryphes auri cuſtodes. Supra omnes Hyberborei incertis ſub arcto ſpatiis collocantur. Omnes hae gentes ſupra Argippaeos et Iſſedonas neque Scythis neque Graecis mercatoribus noti fuere: ſoli Argippaei et Iſſedones de iis aliquid ferebant. Iam Maſſagetae ſub ortu ſolis, trans Araxem, ad Caſpium mare e regione Iſſedonum ampliſſimis terrarum tractibus continebantur. Iſſedones autem ad occidentem habebant Argippaeos vicinos, ad boream Arimaſpos, ad meridiem, forte et ad orientem Maſſagetas, et pertingebant ad Caſpium mare, vt haec dilucidius ex ſubiecta a nobis tabula adparebunt.

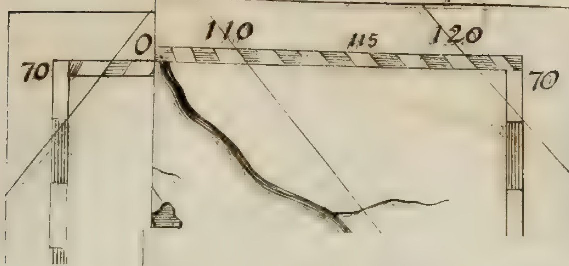
Sic igitur Herodoto duce gentium illarum ſitus deſcripſimus, vt natura ſpatiorum et indicia probabilia pati ſunt viſa. Quantum a nobis diſſentiat Olaus Rudbequius et quam vagis ratiociniis populos illos per omnem ſeptemtrionem ferat, in compendio dicam. Callipidae, inquit, ſunt ad Boryſthenem. Halizones, vbi nunc Halizum eſt. Scythae Aratores in Polonia Liuoniaque. Neuri ad Viſtulae orientalem ripam, ad Naruam vſque, denique Scythae Agricolae, qui ad orientem Boryſthenis erant, in Moſcuenſibus agris. Scythae Regii ſunt Tattari Crimenſes. Melanchlaeni ſunt Moſcuenſes ad Ladogam

gam vſque et Onegam. Budini ſunt ad Balticum mare. Thyſſagetae in Carelia et Sauolaxia. Iyrcae ſunt in Ruſſia ad Iyrgowitz. Scythae Calui ſunt Lappones, Sacri ſunt Vpſuiones. Argippaei ſunt Sueci qui ab Arkippar Suecico vocabulo *telis pugnare* dicti, ad quos Scythae per ſeptem linguas commearunt, Polonicam, Ruſſicam, Lituanicam, Eſthonicam, Finnicam, Lapponicam. Iſſedones denique ſunt in Eſthonia. Quibus ego confutandis non immorabor, cum per ſe quisque nullo negotio intelligere poteſt, ex iis, quae diximus, nimis ſoluto vagoque curſu tetendiſſe a Boryſthene in Scandinauiam, vt nec flumina, nec montes, nec paludes retardarent euro leuiorem vento, atque eo in curſu ſeminaſſe paſſim Scythas Herodoti, veluti dentes Cadmei draconis.

Nicolaus Vitſenius in prima editione ſeptemtrionalis et orientalis Tartariae (9) parte prima de regionum harum antiquis incolis egit Herodotumque produxit, ſed nuſquam explicuit. In altera autem editione (10) partem illam primam prorſus omiſit. Ne quis denique miretur a nobis Eridanum Herodoti et Venetos iis in locis poni. Diximus cauſſam in diſſertatione de numo Rhodio, et dicendi erit locus alias, cum multa praeterea, quae hic praetermiſimus, explicandi poteſtas dabitur.

(9) *Noord en Ooſt Tartarye Amſt.* 1692. *f.* 107.
(10) *Amſt.* 1705.

DE



…AL HISTORY

Comm. Acad. Sc. Tab. 16 pag. 424.



DE MVRO CAVCASEO.

Auctore

T. S. Bayero.

CVm PETRVS MAGNVS Derbentum et circumiectas regiones bello Perſico deditione in poteſtatem accepit, vt erat animo non modo in belli pacisque conſilia erecto, ſed etiam qui grauiſſimas imperii curas tali otio temperaret, ex quo aliquis doctrinae honos, artibus acceſſio, publice priuatimque fructus et vndique gloria compararetur, quidquid ſpectatu dignum in illa expeditione occurrebat, partem per ſe contemplatus eſt, partem per fidos induſtriosque homines explorauit. In primis aduertere exercitus Ruſſici oculos inacceſſa Caucaſi iuga, communita caſtellis et muro, vt adparebat, firmiſſimo et vt tradebatur a gnaris regionum, vaſta longitudine porrecto inter Caſpium mare et Pontum. Pars muri, quae ſubiecta erat oculis, de omni reliqua mole coniecturam mouebat, quanta et quam admirabilis eſſet, praeſertim in illa ſolitudine, ſuper illis montium faſtigiis et cum praeterea hominum ſermo et ipſe lapidum color ad vetuſtatem vltimam tam inſignis artificii opus referret. His rebus incenſus ad ſpectandum muri ſitum Demetrius Cantemirus Moldauiae Princeps ad Imperatorem ſe contulit, oſtenditque cupere ſe, ſuſcepta circum murum excurſione, tam nobile gentis alicuius rerum dominae monumentum explorare. Collaudatus ab Imperatore cum viginti admodum dimachis *M. Octob. 1726.*

 mu-

murum, qua poteſt, obit, tractum eius, diuergia, propugnacula et vicina muri deſcribit, viam metitur. Longius proceſſuro metus obiiciebatur a Dageſtanorum inſidiis, quas manipulus ille, ſi vndique in ignota et confragoſa regione barbari coorirentur, effugere non poterat. Rediit Cantemirus e diſcrimine tanto ſub veſperam incolumis, et quae cognouerat, in commentarios retulit. Ad ceteras virtutes eo in Principe ſumma animi magnitudo erat, multo vſu periculisque exercita, et doctrinae eruditionisque incredibiles amores, vt, quae ad veterum ſuperiorumque temporum memoriam in horum populorum rebus requireres, haud aeque ex alio cognoſcere poſſes: cuius laudis teſtes ſunt commentarii, quos partem perfecit de Turcarum et Moldauorum rebus, partem de antiqua Dacia, aliosque complures adfectos reliquit. Chartas in quibus muri ſitum deſcripſerat, communicatas accepi ab Antiocho Cantemiro Principe patris virtutum aemulo et imitatore ſtudiorum: commentariorum quoque laceras ſchedas, in quibus perpauca, quae memoriam fugitura ſunt viſa, notauerat, eiusdem beneficio Principis excuſſi, interea dum caremus maxima parte eorum, quae ſapientiſſimus Demetrius ab ſe animaduerſa, e memoria repetiturus fuerat, niſi diabethes, cum eum in Derbentina expeditione inuaſerat, paullo poſt incomparabilem virum extinxiſſet. Elaborandum igitur mihi videbatur, vt monumentum, quod doctiſſimi Principis eruditione et luce ingenii multo illuſtriſſimum futurum erat, ita ex antiquitate explicarem, vt deſiderium illius aliquantum lenirem mea opera.

Demetrius igitur tractum muri, quem obiit et orgyis ſta-

ſtadiisque Ruthenicis dimenſus eſt, et montium vicinorum conualliumque ſitus et viarum anfractus receſſusque inter equitandum tumultuario opere conſignauit, in caſtris autem paullo exactius deſcripſit. Sunt fortaſſe in his quoque, quae retractaturus ad amuſſim erat: ſunt quae nos dubios relinquunt. Quia autem nihil, quod eo pertineret, in ſchedis Principis repertum eſt, maluimus ita, vt conſignatam accepimus tabulam publice exhbere, quam priuatim quidquam ex coniectura immutare. Atque vt inde ab vrbe incipiamus, a qua eſt profectus, et quam ex eius ſchedis diligenter deſcriptam habemus, Derbentum caput Schiruani (quae prouincia a Cyro flumine ad territorium vrbis porrigitur, ex quo Dageſtana, hoc eſt, montana regio ad Circaſſios vergit) ad mare eſt ſitum in loco decliui. Inde iam occidentem verſus mons in aſperam rupem ſurgit, in qua arx locata eſt. Eam ex vrbe petunt per portam *Kyrclar*, et via media eſt foſſa per duriſſimum exciſſa ſaxum, quadraginta in longum orgyias, in latum quatuor, tres in profundum. Ab ſumma arce ad centeſimam orgyiam pagus eſt *Piridimisky*, quaſi *genium* ſeu *daemonem Damaſcenum* dicas. Eſt enim in illo pago monumentum cuiusdam *Piridimisky*, quem Damaſceni filium regis fuiſſe perhibent. Titulum in ingenti ſculptum lapide Demetrius legere non potuit, quod litteras Cuficas et ipſe ignorabat et nemo alius, qui interpretaretur, erat. In vrbe turris diuerſo a ceteris et ſqualidiori lapide ad ſeptemtrionem conſtructa, vltimam antiquitatem referebat: et adfirmabant ciues, hic Alexandrum coepiſſe fundamenta vrbis iacere. Sunt autem, ſi ab arce deſcendas ad mare, in ſeptemtrionali mu-

ro hae vrbis portae. Prima *Driardizi Capuſi*, altera *Kyrclar Capuſi*, tertia *Babulbab* ſeu *porta portarum*, magnificae ſtructurae opus, quod adhuc vetus nomen vrbis conſeruat. Latum eſt duas orgyias, altum vnam. Superius limen non arcus in modum teſtudine firmatur, ſed lapides ingentes poſtibus ad rectos angulos innituntur, nullis inter ſe ferramentis deuincti. In ſubterranea portula (*Babulkyiamar*, *portam extremi iudicii* vocant) figurae, incertum an hieroglyphicae, exſtant. Ferunt autem, portulam aequali cum ceteris altitudine exſtructam paullatim ſubſediſſe, et cum tota hauſta fuerit, cenſorium illum humano generi adfore diem. Ab vrbe profectus Demetrius per ſeptem ſtadia Ruthenica, (*) vt ipſe teſtatur, murum explorauit. Adparet enim e tabula, exploratas ab eo fuiſſe 3285 orgyias, quae efficiunt ſex ſtadia et ducentas octoginta quinque orgyias reliquas. Nam cum excelſa iuga, ſcrupeam viam et ſaltus vallesque ſtudioſe perreptat, dum metitur murum, dum ſub meridiem corpus curat, eundo redeundoque dies effluxit. Addit tamen in ſchedis Demetrius, certo conſtare, murum ad fontes Ihrani fluminis in finibus Georgiae per quadringenta et quinquaginta ſtadia produci. Illius ego fluminis nomen nuſquam locorum in Georgiae limite reperio, igitur venit mihi ex dimenſione illa Deme-

(*) *Stadium Ruthenicum dicitur* верста *Voerſta et continet* 500 сажень *Saſchen ſeu Orgyias Ruthenicas. Vnum Saſchen habet* 3. аршинъ *Arſchin ſeu vlnas Ruthenicas. Vlna vna Ruthenica eſt aequalis* 28 $\frac{8}{100}$ *digitis Londinenſibus.*

metrii et ex ipſo ſitu in mentem, eſſe fluuium *Tori* in tabulis Delilianis ad 63. gradum longitudinis et $44\frac{1}{2}$ gradum latitudinis. Montes conſpiciuntur ad Derbentum diuerſa altitudine: ſummum faſtigium eſt montis *Schadagy*, quaſi *Regium* dicas *montem*, quia Nuſriuanus filius Kieïcubat in eius vertice domum condidit, in quam animi cauſſa recreandi nonnumquam diuertit. Altitudinem quadrante dimenſi, octodecim ſtadiorum obſeruaſſe ſibi ſunt viſi. Secundus ille ab Ariarathe habetur, mediam amplius partem niuibus obtectus. Montes plerique in Caucaſi tractu, vt a Conſtantino Principe Demetrii filio, qui cum patre murum obiit, accepimus, praerupti et aſperi rupibus virgultisque conſiti, nonnumquam in cacumine planitiem protendunt. In conuallibus ſunt vineae. Vnum vicum ſe videre Conſtantinus meminit, in quo Iudaei Perſicae Ebraeaeque linguae callentes. Per montium iuga et valles murus continuatus, nunc in ruinis iacet. Turres quaedam cum portis integrae, praeſertim in vallibus, Moſcuenſis vrbis turribus non diſſimiles. Craſſus eſt murus orgyiam Ruthenicam tantummodo vnam. Lapides ſunt, vt Xenophonteo verbo vtar, κογχυλιάτοι, quales ea in regione reperiuntur, trium vlnarum Ruthenicarum longitudine, craſſitie vnius vlnae: lateres nulli vſqvam viſi. Nec ferramentis aut caemento deuincti ſunt lapides, ſed politura ſola et ſtruendi artificio ita commiſſi, vt vix rima adpareat. Non omittendum duxi hoc loco, quod cognitum eſt ab interprete Georgiani Principis, qui in hac vrbe aliquanto tempore egit. Hic Princeps cum cogeretur, ab inſidiis in tuta ſe recipere, Teflifio ſeptemtrionem verſus Oſſetum pe-

tiit et inde ad radicem Caucaſi vertit in Tuchetum, tum in Tianetum et Eretum, donec in finibus Schamachiae vrbis ſuperata aſperitate montium, planitiem tenuit. Tum vero Bacuam conceſſit atque inde nauigiis Derbentum. Ab Oſſeto octo dierum itinere Caucaſum a ſiniſtro, et in cacumine eius, muri rudera conſpexerunt. In Delilianis tabulis, (1) ad Pontum Euxinum ſub 44. gradu latitudinis et 58 $\frac{1}{2}$ gradu longitudinis, prope ab Dandaro vrbe muri veſtigia notata ſunt, quae ſecundum Cudurum fluuium ab auſtro in boream vergunt, atque ad extremum paullulum inflectunt in orientem, quinque admodum et ſeptuaginta ſtadiorum Ruthenicorum tractu. Siue a Soſcamo Sabba principe Georgiae, ſiue a Cruſio aut Zurabeco eius muri notitiam clariſſimus geographus habuerit, eſt profecto inſigne argumentum continuati inter vtrumque mare Caucaſei muri. Inueni poſtea P. Archangelum Lambertum miſſionarium e congregatione de propaganda fide, in itinere Iberico (2) murum illum, quem in tabula exhibet, ita fere deſcribere: *regionem eſſe vaſtam, et murum ſupra ſexagies mille paſſus ductum: paſſim ab turribus et cuſtode milite defendi: a praecipuis vrbis Odiſci ciuibus, ſingulis menſibus, delectos milites eo mitti, qui dimiſſis ſuperioris menſis excubitoribus, cuſtodiam agant: a mari regionem paullatim aſſurgere vſque in altiſſimum Caucaſi culmen: inferiorem regionem, partem a natura et paludibus, partem ab arte et ligneis arcibus muniri, ne cui inui-*

(1) *Regionum vicinarum maris Caſpii A.* 1723. *editis.* (2) *Dans le Recueil de voyages au Nord* T. *VII.* *p.* 176.

inuitis militibus iter pateat. Iam ab hoc muro vsque ad eum fluuium, ad quem Cantemirus certo compererat murum ab oriente protendi, non magnum ſpatium intercipitur, in quo ſeu deleta ſunt veſtigia muri, ſeu non explorata et memoriae prodita.

Non dubito, multos fore, qui mirentur, cum relatum legent de tam nobili vetuſtatis monumento, per PETRI M. expeditionem ab obliuione vindicato: alios, qui ſcire cupiant, quantum de eo ante hoc tempus cognitum fuerit, pleroſque qui conquerantur de totius muri ſitu tractuque non penitus omnia exacta et comperta teneri. Quibus ego, quantum in me eſt ſatisfaciam explicaboque quae memoria teneo: nam quae exploranda adhuc ſunt, ea poſteritatis cura eſto.

Graeci ſero aliquid de Caucaſo monte, (quem Scythae *Graucaſum a candida niue*, quaſi Alpes quasdam appellarunt, (3) per Ponticas colonias cognouere. Eum igitur, quod in regione longinqua (vt tum erat) atque idcirco fabulis apta ſitum exiſtimabant, duriori ſupplicio mulctatum Prometheum credidere, ſi e Iouis mandato ad Caucaſum alligaretur, quo vtique liberatum eum veniret nemo, niſi Hercules aliquis. Heſiodus Prometheum tantummodo columnae alligauerat: at Aeſchylus, primus, quod quidem conſtat, relegauit in Caucaſum illum, qui inter Pontum et Caſpia littora aſſurgit. Herodotus, quod Halicarnaſſi natus et in Aſia multum verſatus eſſet inter praefectos regios, earum conditionem terrarum, quae ſub Perſis continebantur, exactius quam quisquam alius cogno-

(3) *Plinius L. VI. c.* 17.

gnouit. Is in Euterpe Caſpium mare tradit quindecim dierum longitudine et octo dierum latitudine comprehenſum, ad occidentem habere Caucaſum praetentum vaſtitate et altitudine eximia, multisque diuerſarumque nationum mortalibus frequentatum, qui veſtes pingebant ſucco, ita vt animantium figurae non pictae, ſed intextae viderentur, durabili lanae colore. Eo monte, (vt is in Thalia ait) Perſarum imperium terminabatur, et ab eius incolis quinto quoque anno centeni pueri et totidem puellae tributum mittebantur regi. Ad ſeptemtrionem Caucaſi nihil iam Perſici iuris erat et ad orientem Caſpii maris planities immenſi ſpatii, Maſſagetarum ſedes, nota erat. Clauſtra quoque duo in Clio obſcure attingit, per quae Cimmerii Scythaeque diuerſis regionibus viisque effuſi ſunt in ſuperiorem minoremque Aſiam. Nihilo notior Caucaſus per expeditiones Alexandri imperiumque Lyſimachi aut Aſiae Syriaeque regum, quoniam illorum quoque res in obſcuro iacent. L. Lucullus, rebus aduerſus Mithridatem geſtis, haud longe ab eo monte abfuit. Cn. Pompeius Romanorum primus prope a Caucaſeis clauſtris conſedit. Lucanus (4) Pompeium ita loquentem inducit in Pharſalicis:

Si vos, o Parthi, peterem cum Caſpia clauſtra,
Et ſequerer duros aeterni Martis Alanos,
Paſſus Achaemeniis late decurrere campis.

Ex eo tempore clauſtra duo Caucaſi, ad orientem Caſpia (a vicino mari, a quo etiam tractus montis ad orientem diuergens, Caſpius dictus, ſi qua Eratoſtheni fides) (5) ad

(4) *L. VIII. v. 222.*

(5) ad occidentem Caucaſea innotuere, temere inter ſe confuſa a ſcriptoribus, quod Plinius non vno loco reprehendit. Ita Lucanus perperam vocat Caſpia, cum ea Pompeius, aut Romanus quisquam imperator numquam attigit. Nam, vt de Pompeio dicam, is, quod ex Appiano et Plutarcho liquido conſtat, poſtquam ad Euphratem aſſecutus Mithridatem, magno nocturno praelio ſuperauit, fugientis veſtigiis inhaerens, primum diuertit in Armeniam, progreſſus deinde in Albaniam, (quae intra Caucaſum Armeniamque ſita erat) in Iberos ad opprimendum Mithridatem mouit. Mithridates autem, cum interim Dioſcuriade hibernaſſet, perluſtrata in circuitu ora Pontica, profugit in Boſporum et ad Scythas. Ea via ſequi oportebat Romanos. Itaque, vt Appianus dilucide habet, (6) clauſtra Scythica, qua nemo penetrauerat antea, Pompeius inſedit et in reditu Albanis ob defectionem bello illato, illico vertit in Armenos. Cum ad Caſpium mare tenderet, obiecta ei ſunt terriculamenta ab aliis alia, et praecipue ſerpentum multitudo, teſte Plutarcho: (7) miſit tamen ſuorum aliquos exploratum, atque aquam e Caſpio mari allatam, vt ante eum Alexander, vt nuper Ruthenicus quoque exercitus, dulcem reperit. Ita enim eſt in littoribus, qua flumina accipiuntur, nondum amiſſo ſapore. Eodem errore Plinius (8) etiam eos, qui Corbulonis res in Armenia ſub Nerone geſtas enarrauerunt, Caſpia et Caucaſea clauſtra

(5) *Ap. Strab. f.* 568. *ed. Henr. Petri.* (6) *p.* 400. *ed. Tol.* (7) *f.* 638. (8) *Plinius e Varrone* (9) *L. VI. c.* 13.

confudiſſe indignatur. Addit deinde etiam tabulam earum regionum a Corbulone miſſam in vrbem, nomen Caſpiorum clauſtrorum iſthic ponere, vbi Caucaſea erant. Ergo Cornelius Tacitus quoque alicubi (10) ab errore eo circumuentus eſt. Claudius Ptolemaeus Caucaſeas portas in Iberia Sarmaticas dixit, Caſpias vero, Albanias, et has nimis longe remouit a mari Caſpio, niſi fortaſſis aditum, vbi primum Caucaſi iuga ſeparantur et conualli locum faciunt, indicare voluit.

Quales autem illae portae fuerint, e Varrone (ſiue is, quo vſus eſt Plinius, M. Terentius, ſiue P. Aticinus ſit, vterque Pompeio vsque ad ſummum diſcrimen familiaris) e Varrone igitur et M. Agrippa nobis conſtaret, niſi commentarii eorum intercidiſſent. Nunc incertum eſt, quantum ab alterutro acceperit Plinius, quantum e Corbulonis commentariis inſeruerit. Nam Corbulo rebus magnis in Armenia geſtis, adeo Romanos impleuit fama clauſtrorum Caucaſi, vt Nero in vanis glorioſus, expeditionem in Sarmatas moliretur per Caucaſeas portas, quas Caſpias peruerſe dicebant, quamuis, vt ait Plinius, (1) a portis Caucaſeis vix pateret aditus ad Caſpias, per oppoſitos montes. Plinius igitur, ſeu ab expeditionis Pompeianae comitibus et exploratoribus, ſiue a Corbulonis militibus acceperit, Caſpias portas, ſcribit, „ (2) inter iuga praerupta anguſto tranſitu ſitas, longi„ tudine VIII. millium paſſuum, *toto opere manu facto*, ita „ vt vix ſingula plauſtra commearent: dextra autem laeuaque

(10) *Annal. L. VI. c.* 33. (1) *L. VI.* 13. (2) *L. VI.* 14.

uaque ambuſtis ſimiles ſcopulos impendere: aquae ino- „ piam in XXXVIII millia paſſuum (in quibusdam codi-„ cibus tantum XXVIII. M.) perdurare : anguſtias im-„ pedire corriuatum e cautibus ſalis liquorem , tum ſer- „ pentum multitudinem tranſitum , praeterquam hieme , „ non permittere. „ De portis Caucaſeis autem Plinii apponam verba : (3) *portae Caucaſeae magno errore a multis Caſpiae dictae, ingens naturae opus montibus interruptis repente, vbi fores obditae, ferratis trabibus, ſubter medias amne diri odoris fluente, citraque caſtello, quod vocatur Cumania, communito, ad arcendas tranſitu gentes innumeras : ibi loci, terrarum orbe portis diſcluſo, ex aduerſo Harmaſtis oppidi Iberum.* Praecipua illa Iberiae vrbs eſt, quam Ptolemaeus Harmacticum vocat.

Poſt id tempus nihil magnopere de Caucaſeis Caſpiisque portis eſt relatum , vsque ad CPlin ſedem imperii Romani conſtitutam, vbi et vicinior Caucaſus erat vrbi rerum orientis potenti et barbarorum irruptiones in Armeniam Aſiam Syriam conſecutae ſunt frequentes, de quibus tam Graeci quam Syri ſcriptores commemorant. Itaque Claudianus ſub Arcadio, paullo ante Stiliconis caedem, de bello Getico canens, inquit:

Nonne videbantur, quamuis adamante rigentes,
Turribus inualidis fragiles procumbere muri,
Ferrataeque Getis vltro ſe pandere portae?
Nec vallum denſaeque ſudes arcere volantes
Cornipedum ſaltus, iamiam conſcendere puppes
Sardonios que habitare ſinus et inhoſpita Cypri
Saxa parant, vitamque freto ſpumante tueri.

(3) *L. VI. c.* 11.

Secundum eum Procopius Caeſarienſis multis rebus in oriente admotus, Caucaſi portas duas Tzur et Caucaſeam in bello Gothico (4) nominat. In bello Perſico autem (5) portas Caucaſeas ampliſſime deſcribit. Ait enim: Taurum Ciliciae excurrere in Armeniam Perſarmeniam, Albaniam et Iberiam et quanto procedit longius, tanto accreſcere in altitudinem: trans Iberiae fines inter arctiſſimas anguſtias eſſe tramitem, ſeu clauſtra quaedam L. ſtadiorum longitudine et deſinere in monte praerupto et inſuperabili, niſi, quod per eum natura ſic eſt molita exitum, vt manu patefactus videatur. Eam portam Caſpiam ab antiqua vsque memoria adpellari ait. Egreſſis portam aperiri campum vbertim irriguum, ampliſſimo regionis ſpatio et alendis aptum equis, in eoque Hunnos ad Maeotin vsque colere, qui inoffenſo itinere vsque in Iberiam hac excurrere poſſint equites, alia via nec ſine ſumma moleſtia, nec niſi omiſſis equis penetrari eodem poſſe: neceſſe enim eſſe praecipitia montium et anfractus cum diſcrimine perreptari. Eam montis clauſtrorumque naturam Alexandrum contemplatum portam muniuiſſe valuis et caſtellum ſuper ea poſuiſſe, vt ſeptemtrionales populos includeret. Cum Procopius Caſpiam portam dicit, quae erat Caucaſea, ea vetus multorum fuit offenſio, vt ſupra e Plinio docui. Et is error adeo infecit omnes ſcriptores, vt cum nomine memoria ipſa Caucaſearum portarum paullatim aboleretur. Caſpiarum autem portarum (quae ex eo tempore celebriores euaſerunt) hanc deſcriptionem Euſtathius Theſſaloni-

cen-

(4) *L. IV. c* 3. (5) *f.* 28. *ed. Pariſ.*

cenſis in parecbolis Dionyſianis (6) dedit: Medos in orientem eſſe verſos vſque ad Caſpias portas, quae intra Mediam continentur clauesque Aſiae appellantur: montes autem eſſe, aut potius praeruptas rupes in modum portarum, et ſeu a mari, ſiue a Caſpiis incolis nomen habere: hac a ſeptemtrione in Hyrcaniam et Caſpiam Perſiamque iter eſſe, gentesque boreales tranſitu prohiberi.

Haec fere ita de Caucaſeis et Caſpiis clauſtris noſtri homines prodiderunt, nemo autem ex omni vetuſtate, ſeu Latinus, ſeu Graecus ſcriptor, muri, qui ductus eſſet in Caucaſo, mentionem iniecit. Arabes vero et Perſae murum hunc celebrant ſcriptis et nomine

سد ياجوج وماجوج

ſeu aggeris obiecti Gogo et Magogo. Thomas Hyde in epiſtola de menſuris et ponderibus Sinenſium, exiſtimauit ſe illum murum in Sinis reperiſſe. In eo autem eruditiſſimum virum ratio fugit. Abulgaſus Bagadur Chan in *Schagjare Turki, genealogia Turcarum* de muro Sinico fatus ait:

في عرب سد دير تركي برلان تورقورقه
ديرلار خطاي خلقي اونكو ديم

Arabice vocatur Sed, quod Perſice eſt Dir ſeu porta, veteri lingua Turcica Turcurga, Chataica ſeu Sinica lingua, Vnguli. Haec ita corrupte ſcripſit Abulgaſus, corruptius in Ruthenicam, ex ea in Germanicam, ſic denique in

 Gal-

(6) *ad v.* 1034.

Gallicam linguam translatus editusque. (7) Nam illud *Vngu li*, eſt *Van li*, quod *decies mille ſtadia* ſignificat, quo nomine Sinenſes regni ſui quaſi moenia vocant. Ab eo muro autem Abulgaſus diſtinguit hunc, quem Alexander Magnus oppoſuit gentibus *Jagjugj et Magjugj*, (8) quas Tattari dicunt, habere nares ſimiles caninis, et murum aeneum nequidquam lingere adhuc: proxime autem ante illum extremum et cenſorium diem perrupturas moenia naribus eſſe. Ab hoc denique diſtinguit murum, quem *Nuſchiruan* (9) e regione Schamachi circa regnum ſuum duxit.

Hic ille eſt, quem in ruinis adhuc iacere comperimus. Alter ab eo non eſt diuerſus, ſed fabuloſo nomine et commentis Mahometanis obſcuratus. Nam cum Mahometes in Surata decima octaua ab Alexandro intra duos montes murum conditum ait, ex eo eſt quaeſitum ab ſectae illius et ſuperſtitionis hominibus, vbi terrarum is eſſet. Eledriſus multa ridicula tradit, Alſalemo Altargjeman (ſeu Interprete) auctore. Alſalemus ait, ſe miſſum eſſe a chalipha quodam, qui in inſomnio aggerem hunc Alexandri inter terras ſuas et inter Gogum Magogumque medium, veluti patere viderat, vt qui ille eſſet agger, diligenter exploraret: dediſſe ſibi chalipham praeſidium quinquaginta equitum et quinque millia denariorum et munus praeterea decies

(7) p. 118. 119. (8) In Germanico et Gallico interprete *Iadſutz-madzutz* l. c. (9.) Ex quo illi fecere *Nau-Schiruanadill Sultanum Sazaarem Schamathiae*, inuito Abulgaſo.

cies mille drachmarum, equitum autem vnicuique quinquagies mille drachmas ſtipendium et commeatum in annum vnum, centum denique mulos, qui aquam et neceſſaria alia portarent. Quis ille chalipha fuerit, neque Abdalla Ebn Chordaba, neque Eledriſus, qui memoriam rei ex Alſalemo conſeruarunt, prodidere. Quoniam autem Alſalemus profectum ſe refert ab vrbe Sermenraia, ex eo notam temporis duco. Nam Motaſemus chalipha Abbaſidarum octauus, ſub auſpicium principatus, quem A. C. Iↄcccxxxiv. iniit, ſedem imperii Bagdado tranſtulit Sermenraiam, haud longe a Bagdado ſitam ad Tigrim. Ceteri chaliphae deinceps ad Motadedum, eadem in vrbe commorati ſunt. Motadedus A. C. Iↄcccxciii. ſedem imperii Bagdado reſtituit. Sex igitur chaliphae, annis fere ſexaginta, Sermenraiae egerunt, eoque tempore plerosque interpretes Graecos inter Arabas fuiſſe ex Albulpharagio intelligimus, quorum numero hic Alſalemus Altargjeman inſerendus eſt. Alſalemus Sermenraia cum litteris chaliphae profectus eſt ad Iſaacium Eben Iſmael Armeniae dominum, *Tephliſium*. Ab Armeno cum commendaditiis litteris ad regulum *Alſarir*, atque deinceps ad regulum *Lan* et dominum *Philaſchae* peruenit. Ab hoc quinque impetratis ducibus, ſeptem et viginti diebus ad extremos fines regionum *Beſegert* penetrauit. Haec tam obſcura nomina in Romana editione (in qua Eledriſus peſſime habitus truncatusque meliori parte eſt) interpretari nos oportet. A Teflifio venit in *Alſarir*, quae regio ſita eſt ad Caſpium mare et *Alſerir Aldeheb* (*thronus aureus*) vocatur, in qua cenſetur Derbentum. *Lan* videtur corruptum

ruptum ex *Lahgjan*, quae vrbs in Gilana regione eſt, Laginum Europaeis dictum, quadritui via a Casbino. *Philaſchah* quale ſit, augurari non poſſum. At *Beſegerd* eſt regio *Beſa*, ſeu vt Arabes pronunciant, *Phaſa*, quaſi *borealem* dicas, quod ad ortum brumalem Perſepoleos vrbis ſita eſt. Hinc in regione nigra, (Cimmerias tenebras inaudiuerat vaniſſimus homo) decem itinere dierum adeo foetere aerem ſenſit, vt aegre dirum odorem balſamis temperaret. Itinere menſis vnius, per loca a Gogo Magogo vaſtata confecto, denique poſt ſex alios dies ad Chacanum Otcos venit, qui propinqua monti huic tenuit, cuius in hiatu agger erat. Hic ille murum inſpexit duobus fere ſtadiis ab vrbe ſitum. Ex eo conſequitur, comminiſci eum iter per Perſiam Indiaeque aliquam partem. Nam in reditu quoque ſe ait ductum ab illis caſtellis verſus Choraſanum in Samarcandiam. Et cum ad Gihonem ſeu Orxanthum, in regione Ilak, a Schabalegico agro vsque ad exitum vallis Alſchaſch, etiam muri veſtigia, teſte Abulſeda, reperiuntur, hinc ille Aſalemus fabulae totius apparatum petiiſſe videtur. Agite ergo, inſpiciamus cum Alſalemo murum. Mons conſidebat in vallem centum quinquaginta Sauadicis ſeu Eracenſibus latam cubitis. Iſthic porta erat ferrea, quinquaginta cubitos alta, duabus peraſtatis munita, quarum vnaquaeque lata erat XXV. cubitos, extraque portam prominebat, craſſitie decem cubitorum. Tota porta conſtructa erat lateribus ferreis aere inductis. Paraſtatae autem quinquaginta cubitos altae, tectum impoſitum habebant centum et viginti cubitorum. Super tecto eminebat aliud aedificium vsque ad cacumen montis, cuius in

ſummo

ſummo culmine ferreae pinnae conſpiciebantur et in pinna quauis ſumma, cornua duo ſibi obuerſa. Valuae clauſae erant, vnaquaeque quinquaginta cubitos lata, quinque craſſa. Peſſulus quoque cernebatur ſeptem cubitos longus, vnum in ambitu craſſus. Is peſſulus viginti quinque cubitis a terra aberat, et quinque cubitis peſſulo altior ſera et clauis longa cubitum vnum et ſemis, cum duodecim anſis de catena pendentibus. Limen portae inferum decem cubitorum latitudine et longitudine centum cubitorum. Praefectus illarum arcium cum decem equitibus obire ſolitus portam, et malleis peſſulum percutere, tum vt audiant populi vltra portam, adeſſe cuſtodes, tum vt ipſi, quid geratur, reſciant. Ibi vero ferebant, ſe admotis auribus, murmur animaduertere ingentis populi, qui vltra colat. Non longe a loco illo caſtrum a ſe viſum refert, decem ſtadiorum amplitudine et arces duas prope portam, altas latasque ducentos cubitos, interque eas fluuium manare. In vna earum aſſeruari inſtrumenta, quibus exſtructum ſit propugnaculum et ferrea caldaria et cochlearia adeſſe, in quibus lateres ferrei ſint apparati. Lateres quoque aliquot ab Alſalemo ſunt viſi, longitudine cubiti vnius et amplius, palmae autem vnius altitudine. Denique, vt fabula deſinat in riſum, viſam narrat aliquando ſuper pinnis muri, multitudinem hominum e gente Gogi et Magogi, quos adeo metuebant, quibus tanta clauſtra, tot arces, tot turres oppoſuerant, ferrea et aenea omnia, contra quos inacceſſum natura ſua montem muro et arte firmauerant: eorum autem tres vento adflatos decidiſſe de pinnis. Viros fortes et bel-

Kkk lato-

latores optimos opinabimini ? immo vero duorum cum ſemiſſe palmorum pumiliones fuere.

Spectatum admiſſi riſum teneatis amici.

Ita ex ſomniis chaliphae exorſa fabula, in ſomniis Alſalemi deſinit.

Gregorius Malatienſis quanto propius a Caucaſo aberat, tanto probabiliora, quam ille Africanus Eledriſus, de ſitu muri protulit: neque is tamen ſine commento. Alexandrum, ait (10) rogatum, vt *aggerem Jagjugj* exſtrueret, murum condidiſſe ex lapidibus ferreis et aeneis, qui accenſo igne in vnum ſolidum ſaxum coaluere, cubitos duodecim longum, octo latum: vbi autem eum perfecit, veniſſe ad locum aggeris magni *Babolabuab*, in conuallibus regionum *Kaphgjak*, effoſſoque fundamento, per montes ipſum produxiſſe vsque ad mare Romanum ſeu CPlitanum *Colzum*. Regio قفجاق *Kaphgjak* ab Arabibus Perſis et Armenis etiam *Daſcht* (quod Antonius Giggaeus *ſolitudinem* interpretatur, Golius autem *planitiem deſertam*) et دشت قفجاق *Daſchte Kaphgjak* vocatur. Situm eius Arabſiades in hiſtoria Timuri ita deſcribit: (1) *Regio Daſcht ab auſtro mare Colzum, impetuoſum et naufragiis infame habet, et mare Mezri, porrectum inde a regione Romanorum ſeu CPlitanorum. Haec duo maria ſe contingerent, niſi montes Circaſſii interiecti eſſent, quo minus miſcerentur: ab oriente habet fines regnorum Chouareſmiae et Otrar et Sagnak, et poſt*

(1) *p.* 108.

poſt ceteras regiones pertingit ad Turceſtaniam , et terram Getarum , porrigitque ſe ad confinia Sinarum, in regnis Mogul et Chatai. A ſeptemtrione autem Emirus Siberiae et Berar et Kaphar et arena eſt, ſicut montes : et poſtea cingitur deſerto , in quo ferae et aues ſylueſtres vagantur, quae ſunt recreationi principibus : nemo perſequitur fines eius deſerti et extrema eius nemo obit : ab occidente attingit regio Ruſſiae et Bulgariae et quidquid chriſtiani nominis prouinciarum eſt. Hanc regionis *Kaphgjak* deſcriptionem obſcuram faciunt quaedam locorum ignota nomina, quae explicanda nobis ſunt. Et primum ab auſtro eſt *mare Colzum.* Mohammed Alfraganus (2) aliique ita vocant ſinum Arabicum, ab vrbe in littore Aegypti, quae Ptolemaei eſt Clyſma. Arabſiades autem mare Caſpium dicit. Eſt enim Arabi huic familiare, vt, quod vocabulum alieniſſimum eſt ab vſu, id maxime vſurpet. Bernardus da Parigi , (3) Angelus a S. Ioſepho et Meninskius Perſis Turcisque *Calſun* et *Colzum* mare Caſpium vocari teſtantur. Thomas Hyde autem (4) Perſam quendam producit, qui eius nominis tamquam imperite adhibiti cauſſa, reprehendit populares ſuos. Gregorius Malatienſis *Colzum* vocat Pontum Euxinum : ſed aut Gregorius ſe fefellit, aut imperiti ſcribae manu hoc inſertum fuit. Mare *Mezri* non Aegyptiacum eſt, ſed Magnae Vrbis ſiue CPoleos : nam مصر *Mezr* quamcunque *vrbem magnam* vocant. Montes Circaſſii

(2) *p* 36. (3) *Vocabulario Italiano Turcheſco p.* 1321 .(4) *Commentario in R. Abraham Peritſol. p.* 65.

eſt ipſe Caucaſus. Ad orientem terminatur notis regionibus. Chouareſmia et Turceſtania non ignobiles. Regio Getarum eſt قتا *Kata*, vt Arabſiades et quidam alii, vt plerique autem, *Chata*, in quo auctor Logat Meſnaui cauillans ait, qui ſic ſcribunt, reuera خطا *Chata*, hoc eſt *errorem* ſcribere. Cataia illa eſt extra Sinas, vetus Getarum nomen, vt alibi euictum dabo. Paullo obſcurius Arabſiades Cataiam hanc et Mogulenſem terram vsque ad Sinarum regiones intra *Kaphgjak* includit. Sed Tagj Altauarich Saadi Effendi in annalibus Ottomannicis et ex eo auctor Nimetullah ſeu lexici Perſici, in voce *Turc* teſtantur, Cataeos et Chotenos incolere دستز قپچاق *Deſti Kapgjak.* Abulgaſus Bagadur Chan in شجره ترک *Schagjare Turki* regionem hanc deſcribit intra flumina تين واتيل ويايق *Tin et Atil et Iaik.* Tanaim dicit et Volgam, qui Etel etiam CPlitanis ſcriptoribus vocatur et notum nomine ſuo Iaicum. Praeterea ſcribit in Kaphgjak coluiſſe *Vruſſos et Olacos et Magjaros et Baskiros*, pulſos autem eſſe a Kaphgjako, qui filius fuit ducis cuiusdam in exercitu Oguſi Chani. Is quia poſtumus a matre in caua arbore editus, ab eo nomen habuit. Nam veteri lingua Turcica *caua arbor* eſt *Capſchak.* Ab hoc regio, vt is ait, dicta, quod eam et ipſe et poſteri eius tenuerunt quatuor mille annos, vsque

que ad Gingiſcanum. Sunt in his fabuloſa, praeſertim quod diluuium excedit ille Abulgaſi calculus: attamen ſatis vetus id regionis nomen eſt, nec Graecis ignotum. Nam cum Polybius *Aſpaſiacas Nomadas* inter Tanaim et Oxum commemorat, (5) Ἀσπασιακαὶ plane corruptum eſt ex *Kaphgjak.* Planities autem ipſa Herodoto et Procopio quoque innotuit, eamque R. Abraham Peritſol vocat *deſerta continentis terrae, pertinentia ad Gomer et Magog*, Plinius (6) autem *planitiem immenſam et Aegypto ſimilem.*

Me non poenitet a propoſito eſſe digreſſum ad explicandum huius ſitum regionis, quod et geographiae pars, quae magna obſcuritate vrgetur, explicatior mea opera euaſit ad hiſtoriae lucem, et ſimul id effeci, vt nobis conſtaret, quibus in conuallibus aggerem Gogi et Magogi Gregorius reponat. Quod autem ſcribit ductum fuiſſe a باب الابواب *Babolabuab* ad Pontum vsque Euxinum, id nos magis confirmat. Nam Derbentum recentius nomen eſt a Perſis inditum et دربند *Derbend, ianuae ſeu portae vinculum* ſignificat, Germanicis fere vocibus. Turcae *Demir capi, ferri portam* dicunt. Et Haytho Armenus: (7) *Miralis*, inquit, *dicitur porta ferri, quam Alexander firmauit propter nationes gentium varias et diuerſas in profundo Aſiae habitantes, quas nolebat poſſe habere ingreſſum in Aſiam maiorem absque ſuo mandato. Et eſt illa ciuitas ſita in quodam diſtrictu maris Caſpii et tangit magnum montem Cocas. Cocas* eſt Cau-

(5) *p.* 862. *ed. Gron.* (6) *L. VI, c.* 17. (7) *p.* 9.

caſus. At Arabes hanc vrbem haud ſere aliter quam veteri nomine *Babolabuab*, *portam portarum* nuncupant, in quibus Naſſireddinus Tuſaeus et Vlugbegus Tattarus eam longitudinis et latitudinis dimenſionem ponunt, quae adhuc Derbento eorum auctoritate in tabulis tribuitur.

Quoniam illum adeo celebrem aggerem ſuis ſpatiis et regionibus definiuimus, de eo quaeramus, quod opinionibus et ſermonibus orientalium populorum vulgatur, Alexandrum Magnum auctorem conditoremque eius muri eſſe. Non opus eſt, vt commoueamur, cum tot teſtes Arabas, Perſas, Tattaros nos circumſiſtere et vrgere videmus. Nam fieri aliter non poteſt, quam ut fabulentur, cum Mahometem ſuum ſequuntur, fabulatorem inficetum et ridiculum. Gregorius Malatienſis quidem e Iacobitarum ſecta Maphrianus fuit, ſed et is adulatus eſt Mahumetanis, quocumque potuit in loco, vsque ad turpitudinem et tantum non fuit eius iudicium, vt ſatis ſciret, *quid diſtent aera lupinis.* Mahometes autem in Surata XVIII. ita ſcenam inſtruit: Dulkarnainum ex mandato Dei progreſſum vſque ad eum locum, vbi primum ſol oritur, inde proſequentem iter intra duos veniſſe montes, intra quos populi, neſcio, qui, eum exorauerint, vt ſe contra Gogum et Magogum defenderet ducto aggere: illum vero ope eorum ferrum liquefactum ad murum conſtruendum adhibuiſſe, vaticinatum praeterea, fore aliquando, ſuperante Gogo et Magogo murum, ut ferrea illa moles in cineres ſubſidat. Quid huic homini facias? Elephanti corio circumtentus fuit, non ſuo. Interim aſſentatores eius illud Artotrogi muſſitaſſe viden-

dentur: *aſſentandum eſt, quidquid hic mentibitur.* Verum in hoc loco interpretes nonnihil diſſentiunt. Sunt, qui illum Dulkarnainum contendunt fuiſſe Arabiae Felicis regem, filium Harethae et patrem Abrahae regum, quorum ex genere Balcais regina Sabae fuiſſe fertur, quae ad Salomonem venit. (8) Maior autem meliorque pars Alexandrum a Mahomete hic indicari ſentiunt, quem cur *Dulkarnain* ſeu *bicornem* dicant, multae ſunt ſententiae ab eruditis explicatae. Nec vero haec de Alexandro finxit Mahometes, ſed aniles fabulas e Iudaeorum, Arabum, Graecorum ſcholis et circulis acceptas, tamquam Palladia intulit in commentarios ſuos *ſummaque in arce locauit.* Ioſephus autem inter Iudaeos primus eſt, qui tribus verbis Alexandrum clauſtra Caſpia ferreis portis communiuiſſe tradidit. (9) Cuius quanta in his fides ſit, vel ex eo puto liquere, quod Alexandro Pamphylium mare ſcribit ita ad tranſitum ſe apperuiſſe, vt Iudaeis, Moſe duce, ſinus patuerat Arabicus (10) ϗ τȣ̃το inquit πάντες ὁμολογȣ̃σιν οἱ τὰς Ἀλεξάνδρȣ πράξεις συγγραψάμενοι. Quae illa eſt impudentia! Rem eandem de Alexandro, auctore muri et debellatore Caucaſeorum populorum orientales omnes in ſcripta retulerunt, quo etiam illud ſpectat, quod Musladinus Sadus Schiraſenſis in Guliſtan canit, Alexandrum magnis cum moleſtiis ingreſſum eſſe Cimmeras tenebras. (1) Samaritani autem in libro Ioſuae, ſeu chronico gentis ſuae ſub primis CPlitani im-

(8) *Abrahamus* Ecchellenſis *in chronico orientali f.* 254. (9) *de* B. I. L. VII. *c.* 29. (10) *in archaeol.* L. II. *c.* 7. (1) *f.* 503.

imperii temporibus edito (quod e codice Goliano deſcriptum habeo) Alexandrum comminiſcuntur, Indiam Perſiam et *BiladilRum* hoc eſt, Aſiam minorem et quidquid in Syria Meſopotamiaque Romani iuris eo tempore erat, ceterasque prouincias ſub iugum miſiſſe, tum autem deſiderio videndi *terram Seir* ingreſſum eſſe tenebras: *Et ingreſſi ſunt* (Macedones) *iter trium dierum in tenebris, dein tenuerunt terram, quae ſupra regionem hanc ſita erat et hoſtiliter inuaſerunt contemplatique ſunt in luce.* Tum vero gemmarum, vnionum, aurique montes viſi ſunt: quid enim e Cimmeriis tenebris repente prodeuntes et ad deſuetam lucem caecutientes non videre ſibi viderentur? De muro tamen illo nihil Samaritani. At Hegeſippus, non ille quidem adeo antiquus, ſed qui plurima a Iudaeis, hoc eſt, e vano hauſit, ita omnia narrat: per clauſtra ferreae „portae, quae Alexander praerupto Tauri montis iugo „impoſuit, cum ceteris gentibus fuiſſe coercitos Alanos: „incoluiſſe autem eos Scythicum Tanaim finitimaque „eius et Maeotin paludem, et veluti quodam carcere il„lius arte et ingenio incluſos, vt ſuis ſe continerent terris, „alienas non incurſarent. Haec ita in oriente percrebuere, vt ad Procopii quoque aures peruenirent. Et Geruaſius Tilberienſis ſic fatur: (2) *in India eſt mons Caſpius a quo mare Caſpium vocatur, inter quem et mare, Gog et Magog, ferociſſimae gentes a Magno Alexandro incluſae fuerunt, quae humanis carnibus et belluinis crudis veſcuntur.*

Iam quae ex incorruptis Graecorum monumentis comperta tenemus, ea minime nobis permittunt credere illis

(2) *T. I. Script. Brunſuic. f.* 911.

illis, Alexandrum ad hunc Caucaſum excurſionem feciſſe. Alexander Olympiade CXI. 2. primo vere Eleunte ſoluit et ad Sigeum adpulit, ad Granicum autem pugnauit Thargelionis ſexto die, ſeu Maii Iuliani die XXII. Inde Cariam Phrygiam Lyciam Pamphyliam ingreſſus, ſuperatis Ciliciae et Amanicis Tauri clauſtris in Syria ad Iſſum menſe Maemacterione, qui nobis October eſt, praelium alterum commiſit. Ex eo per ſe quisque intelligit, tempus Alexandro ſuperfuiſſe nullum, quo veluti otioſus excurreret ad Caucaſum. Poſt ea Tyrum obſedit ſeptem menſes et ſumma vi cepit, Olymp. CXII. 1. Hecatombaeonis τριακάδι, ſeu Sextilis Iuliani viceſimo. Vrbe ea occupata Aegyptum petiit, ordinatisque rebus ab ora Helleſponti vsque in Aegyptum, ad Thapſacum rediit Olympiadis CXII. 2. Hecatombaeone, ſeu Quintili Iuliano. Cum excercitu Perſico pugnauit ad Arbelam ſeu Gaugamala, Pyanepſione, ſeu Nouembri menſe. Darius eo praelio victus mulieres et reliquum regiae ſuae apparatum ad Pylas Caſpias miſit. (3) Alexander autem magnis itineribus Perſepolin feſtinauit, et Darium in Media caſtra habentem ſecutus, cum iſthic neque Scythas, neque Caduſios auxilia ei miſiſſe, vt fama vulgauerat, ab Ecbatana cognouit, cum paucis equitibus perſecutus eſt fugientem in Parthiam. Hic quidem Arrianus ſcribit, (4) Alexandrum ex Media in Parthiam irrupiſſe per Pylas Caſpias, ſed quaecumque illa intra Mediam Parthiamque clauſtra fuerunt, non vtique ſunt Caſpia, quae quaerimus. Quod ſane Plutarchus vidit,

LII dit,

(3) *Arrianus p.* 205. *ed. Blanc.* (4) *p.* 208.

dit, (5) qui ex eo argumentum ducit, Iberos Macedonum imperium declinaſſe, Ἀλεξάνδρȣ διὰ ταχέων ἐκ τῆς Ὑρκανίας ἀπάραντος, quod *Alexander raptim exceſſit ex Hyrcania.* Inde vero Bactrios et Indos adiit et ex his terris redux Babylone deceſſit. Non ſatis mihi eſt, coarguiſſe fabulam, niſi ipſam originem eius patefaciam. Alexander Zopyriona miſerat in Pontum, belli ducem. Is mouit in Scythas, (6) hoc eſt, ad Caucaſea clauſtra, et, ſi Macrobio credimus, (7) vsque ad Boryſthenitas peruenit in armis. Caeſus autem eſt cum XXX. millium exercitu. Nunc fabularum *accipe inſidias, et crimine ab vno, diſce omnes.* Habes enim inſigne exemplum ingenii eorum, qui ſuperioribus ſeculis, ex minimis quibusque argumento ſuſpicandi capto, alia commenta ex aliis ſeuerunt. Scythae (vt illi interpretabantur) et Sarmatae et Poloni, gens eadem vnumque corpus. Ergo victoria Scythica vertitur in gloriam Polonici nominis. Victi ſuperatique ſunt graui bello Macedones a Polonis, vt Vincentio Cadlubeco viſum eſt, victus (quid enim diſſimulem?) Alexander. Porro Quirites! veritatem amittimus. In XXX millibus non eſt veroſimile caeſos fuiſſe ad vnum omnes, ſed aliquos cladi ſuperfuiſſe. Quonam exiſtimemus, eos ſe recepiſſe? Incluſi erant ab aſperrimis regionibus et infeſtiſſimis gentibus. Spes omnis terreſtri itinere per inuictos populos reuertendi conciderat. Ergo tutius mari Caſpio et nauibus ſe committebant. Quo autem exitus patebat? Nempe in orientalem et ſeptem-

(5) *in Pompeio f.* 637. (6) *Iuſtinus L. XII.* 2. (7) *p.* 238.

ptemtrionalem oceanum. Iam in portu nauigabant, cum Balticum e ſeptemtrionali mari tenerent, et expedita erat via in Franconiam Saxoniam Pruſſiamque meam. Nam Scandinauia, vt veteribus viſum, inſula eſt. Vnum ego teſtimonium adponam e geographo Rauennate, (9) qui ea hauſit ex Graecis, *a parte ſeptemtrionale habet totus mundus finem praedictum oceanum, qui venit de India Serica Bactriana et portas Caſpias*, (lege *portis Caſpiis*) *qui oceanus tangit Scythiam eremoſam, iterum Amazones, vbi eas, poſtquam egreſſae ſunt de montibus Caucaſiis, fuiſſe legimus: poſtmodum tangit ipſe oceanus Roxolanos, nec non Sarmatas, item Scythas, poſtmodum Rereſenos, et Sideſennos: verum etiam Germani, vbi egit habitare*, (fortaſſis *etiam Germanos ibi aiunt habitare*,) *Danos, nec non Saxos* (*Saxones*) *etiam Frixos* (*Friſios.*) Amazonas autem egreſſas, vt ait e Caucaſiis montibus, iuxta Colchidem ponit (10) et *Scanziam* ſeu Scandinauiam non aliter quam inſulam vocat.

Quid, malum, inquies, his coniecturis poteſt excogitari pinguius? Verum illud quidem, attamen vertere haec in hiſtoriam iis temporibus, cum tam infeliciter ſcriptores vtebantur vetuſtarum rerum monumentis Itaque Otfridus monachus Francicas ſtirpes, Vitechindus Corbeienſis et Gotofredus Viterbienſis Saxonicas repetunt a Macedonibus. Albertus Stadenſis etiam Pruſſicas, Rugianas et Holſatias. *Inuenitur*, in-

 quit,

(9) *p.* 293. *ed. Porcheronis.* (10) *p.* 140.

quit, *quod reliquiae fuerint Macedonum et mortuo Alexandro, per totum orbem ſint diſperſi: quia enim Alexander virtute eorum deuicerat Aſiam, eo defuncto, ſe illi terrae amplius committere non audebant, ſed cum trecentis nauibus receſſerunt, quae omnes perierunt, exceptis quatuor et quinquaginta, quarum octodecim Pruciam occuparunt, duodecim Rugiam, quatuor et viginti applicuerunt ad Albiam, quarum vna, trans Albiam, Syluam incoluit et ſuccidit, in qua poſtea ſunt inuenti et Holſati appellati.* Nondum ſatis exculta fabula, acceſſit Gobelini Perſonae nobile ingenium: iter enim aditusque omnes patefecit ὁ δαιμόνιος Macedonibus fugitiuis in Pruſſiam. *Macedones*, inquit, *quos Alexander apud montes Caſpios, tamquam ſibi fideliores ad cuſtodiam patriae reliquerat, audientes eum eſſe mortuum, turbati ſunt valde et perpendentes odium incolarum, per terram redire in Macedoniam deſperabant: quare trecentis nauibus praeparatis, miſerunt ſe in mare Caſpium et diu nauigantes per mare oceanum, ſedes ſibi quaerebant: ſed dum longius oberrabant, maris tempeſtate omnes naues eorum praeter LIIII perierunt, de quibus tandem XVII naues intrabant Pruziam et XII naues terram Rugen et littora maris propinqua.* Intelligitis, opinor, fabulas ſimiles eſſe lolio, ſatas e paruo ſemine, nactasque vbera, ſed luxuriantia magis quam culta ingenia, in immenſum illis temporibus accreuiſſe, nunc vbi meſſis facienda eſt, purum hiſtoriae frumentum ſecernendum eſſe a lolio.

Eſt praeterea alia fabulae illius et huius origo. Alexandrum res geſiſſe ad Caucaſum, a Graecis quibus-

dam

dam Arabes acceperunt. In iis eſt Dexippus, (1) qui Alexandrum ad Caucaſum et Maeotin, partis victoriis, in Indiam vertiſſe ſcribit. Dexippum Diodorus Siculus ſecutus eſt, (2) vt ex fragmentis illius colligo. Ceteri ſcriptores tantummodo Caucaſum commemorant, omiſſa Maeotide. Vocant autem Caucaſum, non hunc noſtrum, ſed Paropamiſum ſupra Indiam et Bactriam. Originem erroris apperuere Strabo (3) Plutarchus in Alexandro (4) et Arrianus in Indicis (5) quamquam hic in hiſtoria Alexandri incautius egit, Ariſtobuli auctoritate deceptus, qui adeo ſtolide ſe dederat in hiſtoria, vt, cum in Hydaſpe Alexandro recitaret, is librum eum abiiceret in fluuium, parum vt abeſſet, quin Ariſtobulum ſimul daret praecipitem prae indignatione. (6) Cum Alexander ſuperatis Bactris, in Sogdianam et ad Paropamiſum deflexiſſet, venit Macedonibus in mentem Caucaſus, quem in ſcena audiuerant Athenis, vt per Graeciam omnem, celebrari, atque vt eum in partem gloriae traherent, Paropamiſum vocauere Caucaſum, fluuiumque Orxantum, vt Plutarchus putat, credidere eſſe illum Scythicis armis terribilem Tanaim. Iam ad Tanaim et Maeotin audiuerant Amazonas antiquitus degiſſe. Ergo eas quoque Alexandri rebus ſine pudore miſcuerunt elegantes homines. Veniſſe reginam cum magno comitatu quaeſitum ex Macedone liberos, et vt impletam ſe

(1) *Excerpta Euſebii Graeca f* 57. *et Cedrenus* (2) *L. XVII.* 83. (3) *f.* 787. (4) *f.* 690. 691. (5) *p.* 511. (6) *Lucianus quomodo hiſtoria conſcribenda p.* 610.

ſenſit, rediiſſe ad Tanaim ſuum. Apud Plutarchum multa exſtant, ex quibus haec vanitatis coarguuntur. Quis enim grauior eſt auctor Alexandro ipſo? e cuius accuratiſſimis ad Antipatrum mandatis hoc vnum proditum eſt, Scytharum regem nuptias filiae obtuliſſe. Et cum Oneſicritus haec de Amazonibus hiſtoriae ſuae inſeruiſſet, Lyſimachus rex, qui expeditionis ad Paropamiſum comes fuerat, recitantem Oneſicritum memorabili dicto repreſſit, ϗ πȣ̃ τότε ἤμην ἐγώ; atqui, *vbi, malum, ego, cum hoc accideret*, *fui*? Vt autem ille de Caucaſo error Macedonum animis ſe inſinuaret, magna regionuum imperitia effecit. Nam Graeci poſt Herodotum, vt ex Argonauticis maxime ſcriptoribus et Dionyſio Periegete et Euſtathii parecbolisDionyſianis liquido intelligimus, Aſiam ſub ſeptemtrione omnem arctioribus ſpatiis contrahebant, vt Pontum Euxinum proxime ad Caſpium mare et aliquanto borealiorem ponerent, Maeoti palude Caſpioque mari alueo quodam communi coniunctis. Ita Tanaim ab oriente ducebant, et Caucaſum montem ſub Tanai porrigebant vſque ad extremum orientem. Turbato totius orbis ſitu, Choraſmios prope Colchos et Scythas ponebant et Pharaeſmenem Choraſmiorum regem, vt eſt apud Arrianum, narrabant, ad Ponticam et Scythicam expeditionem ſe Alexandro obtuliſſe ducem, veluti viarum, ob tantam regionis vicinitatem, gnarum. Nempe Diodorus (7) in deſcriptione Aſiae, ad orientem et ſeptemtrionem prouinciam recenſet vltimam Sogdianam et Bactrianam, haud longe a Tanai et Indiam Cau-

(7) L. XVIII. 5.

Caucaſo terminat. Idem ille Diodorus (8) Alexandrum tradit ſedecim diebus traiecto Paropamiſo, vrbem condidiſſe Alexandriam in Caucaſo, qua in Mediam via aperiatur. Habuit igitur in animo clauſtra Caſpia et Derbentum vrbem. Ab hoc quoque orientali Caucaſo Polybius (9) Oxum fluere tradit. Praeter hanc geographiae adeo perturbatam faciem, alia res etiam Macedonas in errorem ſeduxit, Strabone iudice. Inuenerant in Paropamiſo ſacram quandam et horribilem ſpeluncam: eam illico comparabant cum tragoediis ſuis, in eaque Prometheum fuiſſe vinctum et ab Hercule liberatum ferebant. Talibus cothurnis inceſſit fides rerum ab Alexandro ad Caucaſum geſtarum. Neque id adeo mirandum eſt. Sunt enim in Alexandri rebus multa alia incredibilia, vt Hieronis alicuius aut Gelonis aut Clearchi res multo celebratiores euaſerint fide et auctoritate prodentium, quam tanti herois, ſicuti Arrianus cenſet. Et adhuc indignabitur quiſquam, ſi orientales multo his vaniores, temere omnia credidiſſe dicimus, et confuſa perturbaſſe magis, et fabulis aſſuiſſe fabulas?

Quae neque futura, neque facta ſunt, tamen illi ſciunt.
Falſon' av vero?
Non flocci faciunt: dum illud, quod lubeat, ſciant.

Ex quo fonte igitur opinio illa manauerit, inuicte declaraui. Simul adparet, qua cauſſa Derbentum ab Alexandro conditum ferant. Nam, vt Arrianus (10) habet, ad Paropamiſum Alexandria ab eo eſt condita. Plinius (1) oppidum illud ſupra Indiam collocat. Eius rei

(8) L. XVII. 83. (9) *p.* 863. (10) *p.* 230. (1) L. VI. 23.

rei memoria conſeruata eſt, ſed tracta in diuerſa, gentium ambitione. Nam Mugalenſes quoque contendunt in regione ea, quam tenent, Alexandrum res geſſiſſe et vrbes condidiſſe. Teſtimonio illis ſunt loca, nunc deſerta quidem, ſed ruinis ingentibus aduertentia oculos iter facientium, quorum octo numero nonnemo cum per Selengam Sinas peteret, ſe animaduertiſſe Nicolao Vitſenio (2) retulit. Nec tantum eductas e ſaxo domos, ſed ſtratas quoque lapide vias. Haud longe a muro Sinico rudera et columnae lapideaeque turres adparent. Haec oppida Alexandrum euertiſſe Mogalenſes opinantur. At in alia Mugalenſium deſertorum regione (3) vrbs eſt *Jki Burchan Koton* ſeu *Trimingzing*. (Rutheni *Bogatiri*, hoc eſt, *heroum vrbem* vocant) eam autumant vrbem Alexandrum condidiſſe. At, vt diximus ſupra, alii Alexandriam eam ponunt ad Caſpia clauſtra, rurſum alii ad Caucaſea, vbi adhuc nominis illius oppidum eſt. Non, quo ab Alexandro conditum putem, ſed quod ſeu nomen eius in omni fere Aſia illuſtre, impoſitum eſt vrbibus etiam poſteriori tempore conditis, ſeu quod alii principes eodem nomine, vrbes a ſe conditas, a ſe dici voluere. Fuere autem in Georgia, et Mingrelia multi principes Alexandri.

Quaeret nunc quiſquam, quem ego conditorem muri huius fuiſſe cenſeam? Ego vero vtinam vera ita confirmare poſſim, quam facile aliena a fide deſtruxi. Sed in

(2) Nic. Vitſenius in Tattariae deſcriptione *Noord en Ooſt Tartarye tweede druk t'Amſterdam* 1705. parte II. p. 98. (3) ib. f. 127.

in tam obſcura et incorruptis monumentis deſtituta re, malim conuellere popularem opinionem, quam meam inſerere. Si quis Medos prima fundamenta clauſtrorum ieciſſe autumat, ego non intercedo. Nulli enim populo conceſſere in magnificis ſumptuoſisque operibus. Haud procul a Babylone abſuit τὸ Μηδέιας τεῖχος *Mediae murus* latitudine XX pedum, altitudine C. longitudine XX paraſangarum, totus opere lateritio. (4) At Lariſſae et Meſpilorum rudera Xenophonti viſa, illa, C pedum hæc L, pedum altitudine, fundamentum oſtentarunt λίθου ξεστοῦ κογχυλιάτου, vt in hoc muro Caucaſeo. Super eo fundamento lateritius murus fuit. (5) Forte ab Medis quoque clauſtra Ciliciae Syriaeque, muro ducto caſtellisque vsque in mare communita ſunt, quae Xenophon eleganter deſcripſit. (6) Et Medos Scythae graui bello ac ſeruitute ſex annorum adflixerant, vt eos non modo naturae munimentis, ſed etiam artis moliminibus coerceri conſultum videretur. A Medis ad Perſas clauſtrorum illorum poſſeſſio tranſiit. Quapropter Ibn Phacreddin Angjou homo Perſa, (7) totius regni Perſici tractum a *Babolabuab* ad Omanicum vſque mare, hoc eſt, ad ſinum Arabicum definit et ab Oxo vſque ad Euphratem. Vltra Caucaſum ſatis conſtat Perſas nihil tenuiſſe. Deuictis Perſis, haec clauſtra et mare Caſpium in Macedonum poteſtate fuerunt Nam de Seleuco Nicatore Plinius tradit, (8) circumuectum eum eſſe Caſpium mare, circumuectum et-

Mmm iam

(4) *Xenophon in expedit. Cyri* L. II. *c.* 4. (5) *ib.* L. III. 4. (6) *ib.* L. I. 4. (7) *apud Thomam Hyde in hiſtoria religionis Perſarum p.* 418. (8) L. VI. *c.* 17.

iam Antiochum Seleuci filium et praefectum claſſis eorum Patroclen. Et erat regnum eorum vsque in Indiam protenſum, mari Adriatico et Ponto Caucaſoque incluſum, quantum antea Perſarum fuerat. Murum autem ante Seleucum Nicatora ductum in Caucaſo fuiſſe nullum, ex eo mihi fere videor intelligere, quod in Plinio (9) extat his verbis: *Claudius Caeſar a Cimmerio Boſporo ad Caſpium mare CL millia prodidit: eaque perfodere cogitaſſe Seleucum, quo tempore a Ptolemaeo Cerauno eſt interfectus.* Nam illud conſilium non tantummodo videtur pertinuiſſe ad vtriusque maris coniunctionem, verum etiam ad munimentum regni aduerſus barbaras gentes, quo veluti ripa ſtriga eſſet. Si igitur ab Antiocho Sotere aut ab Antiocho Theo murus primum ductus fuerit, non eſt mirandum, quod Alexandri vocatur. Nam quaedam, quae ἐπίγονοι eius geſſerunt, huic tribuuntur Alexandro. Luculentum exemplum eſt, quod orientales *aeram Alexandream* et *aeram Dulkarnain ſeu Bicornis*, dicunt eam epocham, quae a Seleuco Nicatore, duodecimo poſt Alexandrum defunctum anno inſtituta eſt. Sub Seleuco Callinico Nicatoris pronepote iam fractae ſunt vires Seleucidarum, cum Parthi defecerunt. Armeni quoque et Hyrcani extulere caput. Et *Hyrcanum regem* τῆς παρόδου δεσπότην *Caſpiorum clauſtrorum dominum*, Veſpaſiano imperante fuiſſe, Ioſephus auctor eſt. (10) Caucaſea tenebantur a Ponti regibus et deuicto Mithridate in Romanis ditionibus cenſebantur. Iberi autem cuſtodie-

(9) *L. VI c.* 11. (10) *de B. I. L. VII. c.* 29.

ſtodiebant. (2) Eo autem tempore murum iam concidiſſe credibile eſt, quoniam mentionem eius fieri non inuenimus apud illos, qui portas tamen Caucaſeas non ignorarunt.

Cum Mahometani duce Gjerai Chano Derbentum et Anderum vrbes occupaſſent, Muhamed Auabi Akraſſi iuſſus eſt, vt, excuſſis Arabum Perſarumque ſcriptis, antiquitates Dageſtanas Turcice commentaretur. Is liber a praefecto vrbis dono datus eſt PETRO Auguſto, atque nunc in collegio exterorum negotiorum aſſeruatur. Scribit autem, murum Caucaſeum ab Alexandro conditum denique ita corruiſſe, vt vix veſtigia extarent. Cubadem autem, patrem Nuſreuani, Perſarum regem, bellum geſſiſſe cum Hacano, rege Turcarum et Hyrrorum. Hacanum illum dominatum fuiſſe regno Nucrato et Ruſſis vniuerſis, exercitum quadricies mille militum habuiſſe: tandem pace compoſita, Hacanum in matrimonium dediſſe Cubadi filiam, actumque eſſe inter ſocios reges de muro condendo, quo ſecernerentur prouinciae: Cubadem autem a Gabriele angelo admonitum de Alexandri muro, ſuper ipſis fundamentis, ab arena aggeſta perpurgatis, inaedificaſſe partem muri meridionalem, intra annum vertentem, atque deinceps quod reliquum erat a mari vsque ad vlteriorem partem Tibriſerani (quae vrbs a Derbento nonaginta agatis diſtet, ſtadiis Ruthenicis admodum quadringentis et quinquaginta) perduxiſſe et ferreis portis communiuiſſe intra annos ſeptem, vt centum milites aduerſus centies mille hoſtes ſe defendere poſſent. Ab eo tem-

(2) *Ioſephus de Antiq. L. XVIII. 6.*

tempore Armeniam Mediamque ab incurſionibus hoſtium tutas fuiſſe. Cubadem, ordinatis ad vtriusque muri portas cuſtodiis, filiam Hacani poſt vnius conditionem noctis remiſiſſe ad patrem, diſſimulantem hanc tam grauem iniuriam, et reuerſum eſſe in Aderbeidrianam, ſeu Mediam et Arak ſeu Parthiam. In his quaedam accedunt ad veram hiſtoriam. Verſamur enim iam in illis temporibus, in quibus hiſtoria Perſica et orientalis paene omnis, e fabulis ad veritatem, veluti de nocte vergit in diluculum. Erit igitur operae pretium, iſta exigere ad noſtrorum teſtimonia ſcriptorum. Quod de Chacano Turcarum Hirrorumque rege habet, is eſt titulus, qui Hunnis Turcis et Tattaris ſummae maieſtatis fuit. Hirri autem ſunt *Oigur*, populus, cuius res nunc ex Abulgaſo Chano nobis factae notiores. Haec leuiter attingo, quod, niſi temperarem impetum, praeuideo me abreptum iri in prolixam rerum illarum commentationem. Iam licebit Procopium comparare cum Acraſio. Is, poſtquam bella Ephthalitarum Hunnorum cum Peroze patre Cubadis attigit, proditque Perozen per inſidias ab Hunnis circumuentum caeſumque cum omni exercitu, et Cubadem annos duos tributa Hunnis pependiſſe, venit ad mentionem Caucaſearum portarum, quas, vt dixi ſupra, confundit cum Caſpiis. Hoc etiam ex ipſa re elucet, quam e Procopio narraturus ſum. Loca enim, quae ad Caſpia clauſtra vergebant, in Perſarum poteſtate erant, vna cum Armenia orientali, quam idcirco illorum ſcriptores temporum Perſarmeniam vocant. Scribit igitur Procopius (3) portas Caucaſeas multorum in poteſtate fuiſſe, donec eas

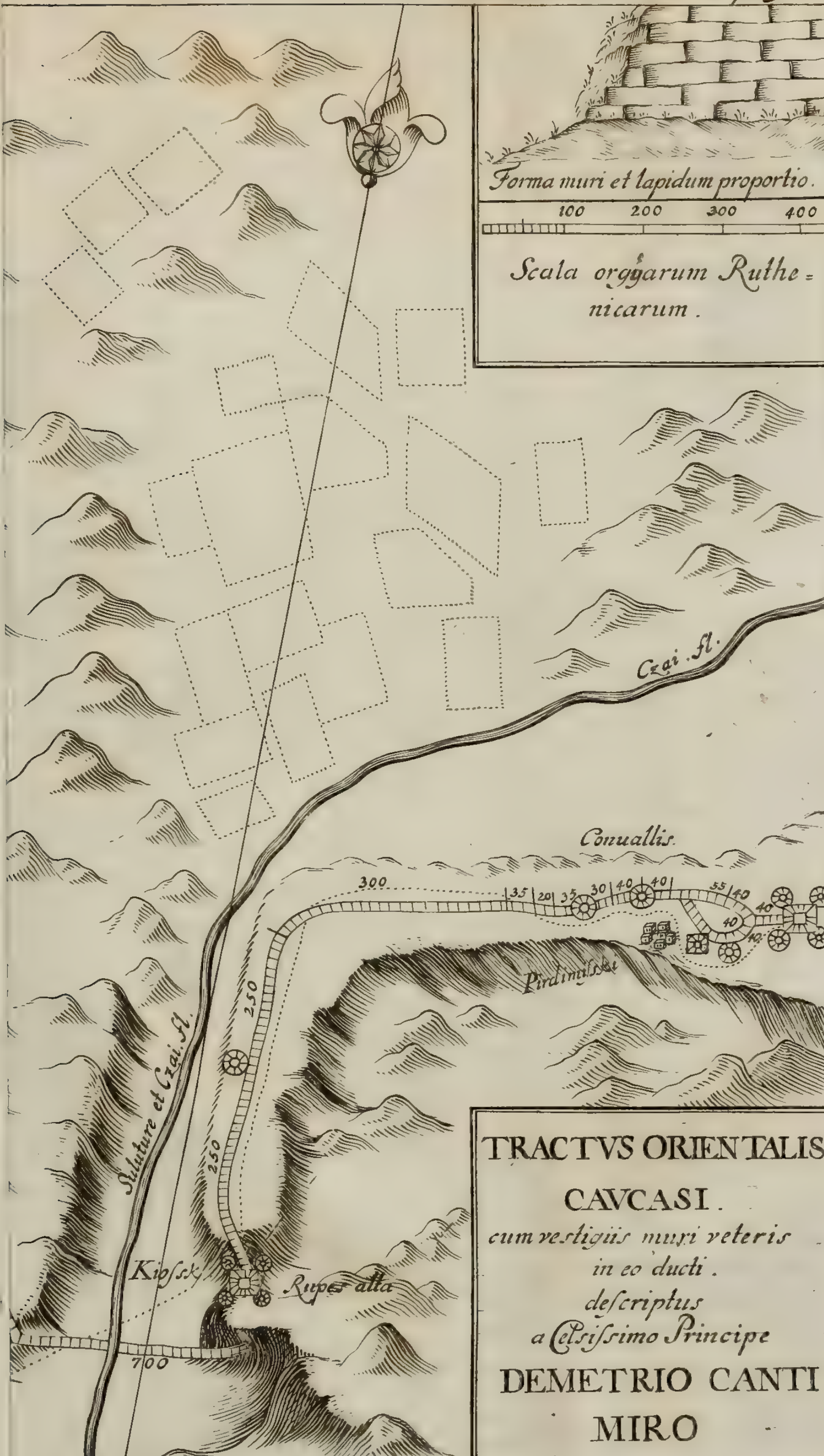
(3) f. 28.

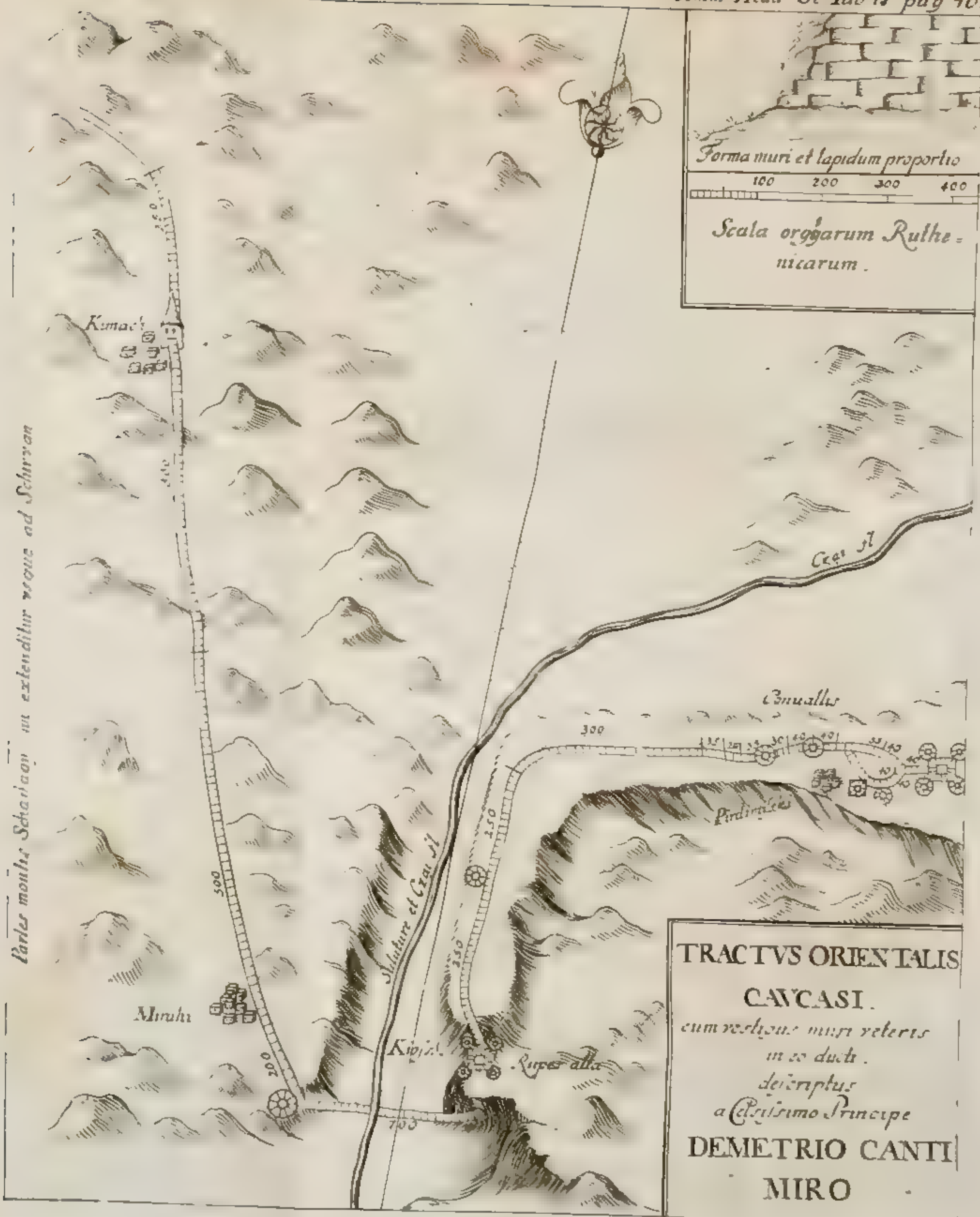
eas tenuerit Ambazuces Hunnus, Anaſtaſio et Romanis impenſe amicus. Is extrema iam aetate legatos miſit ad Anaſtaſium, pecuniae certam ſummam petiit, portas et arcem Romanis traditurus. Anaſtaſius conſilio inito deprehendit, moleſtam militi Romano earum cuſtodiam fore, quod commeatus in loco rebus omnibus nudo aegre ſubueheretur, quodque gentes circum illa loca Romanis non eſſent ſubiectae, legatis humaniter appellatis, carere ſe caſtello poſſe oſtendit. Poſt mortem Ambuzacis (4) Cobades ex caſtello filios eius eiecit Perſicumque praeſidium impoſuit. Poſt id tempus Iuſtiniano imperante et rebus orientis a Beliſario praeclare adminiſtratis, miſſus eſt ad Cubadem Rufinus legatus de pace. Cubades autem multa queſtus eſt apud Rufinum de Iuſtiniano et Romanis. Se clauſtra Caucaſi, cum Anaſtaſius emere nollet, ne, alendo ad eorum praeſidium milite, ſumptus faceret, occupaſſe, communi Romanorum ſuoque commodo, ne ea barbari in Romanas ſuasque prouincias irrumperent, ſe numeroſiſſimum exercitum tutandis illis anguſtiis impoſuiſſe et aluiſſe ſuis ſumptibus, Romanorum compendio. Ita, dum exercitum vnum obiicit barbaris, ne omnia ferre et agere in ſuo Romanoque agro poſſint, iniuſtum eſſe, Romanos non quieſcere, vt neceſſe ſit, alium exercitum iis obiici, quos aduerſus externam vim tutaretur. Diu ſe poſtulaſſe, vt Romani aut finibus Perſicis (tota Meſopotamia) excederent, aut, ſi bellum facere ſuis prouinciis vellent, cura alterius exercitus alendi ſe leuarent, aut ſaltem ad tuenda

(4) *ib. f.* 46.

Caucaſi clauſtra parem militum numerum mitterent, ſumptusque alendi praeſidii ſecum partirentur. Pacem coituram non eſſe, niſi alterutrum Romani faciant. Haec anno quarto Iuſtiniani Cubades a Rufino poſtulauit. Inſecutum eſt bellum, Romanis neutram conditionem accipientibus. Id bellum Romanis prouinciis excidium attuliſſet, ni Cubades vita defunctus et Choſroes Hunnorum irruptionibus fuiſſet exagitatus. (5) Ad eum cum legati a Iuſtiniano eſſent miſſi, de pace conuenit. Inter ceteras conditiones latum, vt, niſi Romanis videretur communi cum Perſis praeſidio clauſtra Caucaſi tutari, centenaria CX hoc eſt, vndecies centena millia auri pondo Perſis appenderent. Nec diuturna pax fuit. (6) Choſroes enim haud ita multo poſt Syriam inuaſit et Antiochiam cepit. Ad Antiochiam de pace actum. Choſroes Romanis eam legem tulit, vt in praeſenti quingenta, in ſingulos autem annos quinque centenaria auri tributum penderent Perſis ad praeſidium Caucaſi excubantibus. Is Choſroes eſt, quem Perſae Nuſriuanum cognomento Coſres vocant, omnium ante ſe regum longe maximus. A cuius potentia non abhorret tanti muri machinatio: et longum fuit illius imperium, vt perficiendo operi ſufficeret. Nam, teſte Georgio Syncello, (7) annos octo et quadraginta regnauit. Ad poſtremum non praetermittendum duxi locum Gregorii Malatienſis, qui poſtquam murum ab Alexandro conditum perhibuit, in eam ſententiam fatus eſt. Reges Perſarum non deſtitiſſe, quærendo muro, donec eum reperiret Jazdegerdus filius Bahram Ju-

(5) *ib. f.* 64. (6) *f.* 112. (7) *f.* 360.


Forma muri et lapidum proportio.
100 200 300 400
Scala orgyarum Ruthe=
nicarum.
Czai. fl.
Conuallis.
300
250
250
Kioſsk
Rupes alta
700
TRACTVS ORIENTALIS
CAVCASI.
cum veſtigiis muri veteris
in eo ducti.
deſcriptus
a Celſiſsimo Principe
DEMETRIO CANTI
MIRO


Forma muri et lapidum proportio
100 200 300 400
Scala orgyarum Ruthenicarum.
Kumach
Cras fl
Conuallis
Rupes alta
TRACTVS ORIENTALIS
CAVCASI.
cum veſtigiis muri veteris
in eo ducti.
deſcriptus
a Celſiſsimo Principe
DEMETRIO CANTI
MIRO.

Juri, Jesdegerdi nepos, Saporis pronepos: eum vero murum lapidibus ex aere et plumbo exſtruere coepiſſe, nec tamen perfeciſſe. Coſroam Nuſriuanum denique ſummis montium faſtigiis murum adiunxiſſe, et in mare produxiſſe mille paſſus, portisque ferreis clauſiſſe, vt a centum hominbus ea regio obſideretur, quam vix centies mille defendiſſent antea ab excurſionibus: perfecto opere ſtatuiſſe eum, vt praefectus regionis, honoris cauſſa, ſolio aureo inſideret. Quae poſtea acciderunt, praeſertim ſub Iuſtiniano Rhinotmeto, ea breuitatis cauſſa conſulto praetereo. Hunc enim induſtriae noſtrae modum ſtatuimus.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PETROPOLI FACTAE

Monitum.

A*D calcem cuiusque Tomi horum Commentariorum Academicorum reſervabitur Diarium Obſervationum Aſtronomicarum; idque potiſſimum hunc in finem, ut tempus ſuppetat recipiendis Exterarum Regionum Obſervationibus, reſpondentibus illis, quæ quolibet anno fient Petropoli in Obſervatorio Imperiali, aut aliis in locis Imperii Ruſſici. Inſerentur igitur ex his Obſervationibus peregrinis illæ, quæ aut coincident cum noſtris, aut quarum comparatio cum noſtris utilitatis aliquid ad promovendam Aſtronomiam et Geographiam afferre videbitur.*

Recenſentur autem in primo hoc Tomo non niſi Obſervationes Satellitum Jovis, quarum ope ſtabilita fuit differentia Meridianorum Petropolitani et urbium totius Europæ celeberrimarum, e quibus Obſervationes noſtris congruas accepimus. Differuntur in proxime ſequentem Tomum horum Commentariorum, illa, quæ facient ad determinandas huius noſtræ urbis Latitudinem et Refractiones.

Ecli-

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS, OBSERVATAE PETROPOLI,

a

Fratribus

Ioſepho Nicolao deL'Isle

&

Ludovico deL'Isle de la Croyere.

Ann.		N. S. temp.	vero.			
			h.	'	"	
1726	Iulio.	10	12	47	0	IMmerſio primi ſatellitis, obſervata per Tubum Campanianum 15. ped. nocuerunt autem eo tempore nimia crepuſculi claritas, atque adhuc alia; unde ultra minuta prima in definiendo tempore non licuit aſſurgere.
	Aug.	9	14	51	30	Immerſio primi ſatell. per eundem Tub. 15. ped. aliumque 20½ ped. obſervata. Ob eadem vero quae antea impedimenta, fides haberi aſſignato tempori non poteſt, niſi extra ¼ minuti unius primi.

			h.	′	″	
1726	Aug.	18	11	15	46	Immerſio primi per Tubum 15. ped.
			11	15	52	Per Tubum $20\frac{1}{2}$ped. cœlum ſerenum & aër tranquillus erat, non procul autem a Iove Luna.
	Sept.	10	11	32	51	Immerſio primi per Tub. 15. ped.
			11	32	56	per Tub. $20\frac{1}{2}$ ped. tempeſtate valde ſerena & tranquilla.
		22	16	13	20	Immerſio ſecundi per Tub. 15. ped. tempeſtate ſatis ſerena, non obſtantibus nubeculis quibusdam.
	Oct.	19	12	21	46	Emerſio primi. per Tub. 15. ped. Satelles autem Iovi valde vicinus erat.
		28	8	47	8	Emerſio primi. per Tub. 15. ped. intra aliquot minuta ſecunda.
	Dec.	6	7	11	18	Emerſio primi, per Tub. $20\frac{1}{2}$ ped.
			10	30	31	Emerſio ſecundi, per Tub. $20\frac{1}{2}$ ped. exacta.
			10	30	38	per Tub. 15. ped. exacta.
		29	7	15	36	Emerſio primi, Tub. $20\frac{1}{2}$ ped. exacta.
			7	15	48	Tub. 15. ped. exacta.
1727	Ian.	2	10	59	46	Immerſio tertii per Tub. 15. ped. cœlo nebuloſo.

			h	'	''	
1727	Ian.	2.	11	0	17	per Tub. 20½ ped. puto autem hanc alteram obſervationem certiorem , & exactam intra pauca minuta ſecunda. Quamvis enim cœlum ſerenum videretur , non ita tamen diſtincte apparebat Iupiter uti alias ſolebat,tranſiens nempe ſubinde per vapores, qui ipſum deformabant , coloribusque inficiebant.
		7	10	9	56	Emerſio ſecundi per Tub.20½ ped.
		10	10	4		per. Tub. 15. ped.
	Febr.	1	7	17	15	Emerſio ſecundi per Tub.20½ ped. exacta.
	Aug.	5	11	52	23	Immerſio tertii per Tub. 22. ped. cælo ſereno & tranquillo ; tardus autem huius ſatellitis motus impediebat certitudinem immerſionis usque ad aliquot minuta ſecunda. Præterierant iamiam 4 aut 5 minuta prima ab initio diminutionis.
		7	10	59	27	Immerſio primi per Tub. 22. ped. nocuit autem Iupiter horizonti proximus.
		8	13	37	9	Immerſio ſecundi, per Tub. 22. ped.
		21	14	50	30	Immerſio primi, per Tub. 22. ped.

1727	Aug.	30	11	15	18	Immerſio primi per Tub. 22. ped. cœlo ſereno & quieto.
	Sept.	2	10	43	57	Immerſio ſecundi. Tubo 22. ped. cœlo ſereno & tranquillo.
		6	13	11	24	Immerſio primi per Tub. 22. ped. non detegebatur autem prius Iupiter, niſi imminuto iam Satellite.
		9	13	21	35	Immerſio ſecundi per Tub. 22. ped. cœlo ſereno.
		10	9	34	30	Emerſio tertii per Tub. 22. ped. cœlum erat tranquillum, ſed non ubique ſerenum.
		15	9	36	32	Immerſio primi per Tub. 22. ped. cœlo ſereno & tranquillo.
	Oct.	31	10	8	48	Immerſio primi, per Tub. 15. ped. Dubia nonnihil ob ventum, nubes & viciniam Lunae.
	Dec.	2	8	46	30	Emerſio primi. per Tub. 22. ped. exacta, tempeſtate valde ſerena, nec obſtante vicinia Satellitis & Iovis.
		12	14	6	0	Emerſio tertii. per Tub. 22. ped. cœlo tranquillo, ſed non plane ſereno.
1728	Ian.	8	12	14	44	Emerſio ſecundi per Tub. 15. ped. certa non niſi intra aliquot min. ſecunda ob impetus venti.
			12	33	34	Emerſio primi per Tub. 13. ped. intra aliquot min. ſecunda ob eundem ventum.

ped.

1728 Ian.	10	5	58	7	Emerſio tertii per Tub. 22. ped. aliquot min. ſecundis incerta, ob ventos vehementes.
		7	0	12	Emerſio primi, per Tub. 22. ped. nocebant venti.
	17	7	56	31	Immerſio tertii, per Tub. 13. ped.
		8	53	4	Emerſio primi, per Tub. 22. ped. exacta.
		9	55	14	Emerſio tertii, per Tub. 22. ped. bona.
Febr.	16	10	59	26	Emerſio primi, Tub. 22. ped. intra pauca m. ſec.
	18	5	28	20	Emerſio primi. Tub. 15. p. cœlo ſereno, ſed claro adhuc crepuſculo.
	25	7	24	10	Emerſio primi Tub. 22. p. cœlo ſereno.
	27	6	40	5	Emerſio ſecundi Tub. 22. p. cœlo ſereno & tranquillo.
	29	8	0	29	Immerſio tertii per Tub. 22. ped. cœlum ſerenum erat & tranquillum, incerta tamen eſt hæc obſervatio intra 10. aut 15. min. ſecunda, evaneſcente, & redeunte Satellite aliquot vicibus.
Mart.	10	11	18	19	Emerſio primi, per Tubos 13. & 15. ped. cœlo ſereno & tranquillo.

Im-

1728 Apr.	12	8	16	12		Immerſio tertii per Tub. 15. ped. cœlo ſereno & tranquillo.
		10	30	40		Emerſio tertii, per Tub. 15. ped. cœlo ſereno & tranquillo; quamvis autem Iupiter non multum ſupra horizontem elevatus fuerit, obſervatio certa eſt intra paucula quaedam min. ſecunda.

Notae ad has Obſervationes.

PRimæ harum Obſervationum uſque ad menſem Februarii 1727. factæ ſunt per Teleſcopia 15. & $20\frac{1}{2}$ pedum, a Fratre meo de la Croyere & a me. Frater meus ſæpiſſime adhibebat Teleſcopium Campanianum 15. ped. ego vero aliud $20\frac{1}{2}$ ped. cuius ope immerſiones primi & ſecundi ſatellitis ſex aut ſeptem min. ſecundis tardius obſervabam quam frater meus ope ſui Tubi; Emerſiones contra citius ego detegebam, plane ita, uti huius rei ſæpius experimentum cepimus in Gallia, utque etiam apparet ex his noſtris Obſervationibus, Auguſti 18. Sept. 10. Decembr. 6. 1726. nec non Ianuarii 7. 1727. Obtulit ſeſe interim quoque differentia 12. min. ſecundorum in Emerſione primi Dec. 29. 1726. ut alias maiores adhuc taceam, nempe 21. min. ſecundorum in Immerſione 3. Ian. 2. 1727, tribuenda vero eſt hæc ultima differenria tarditati motus huius ſatellitis, circumſtantiisque etiam temporis, quæ in latere obſervationis notatæ ſunt.

Poſtquam deinde Frater meus mandato Imperiali hinc

hinc Archangelopolin profectus eſſet menſe Aprili 1727. deportaſſetque ſecum Teleſcopium $20\frac{1}{2}$ ped. ego in reliquis Obſervationibus frequentiſſime uſus ſum Tubo 22. ped. cuius ope, ut multis vicibus Pariſiis expertus ſum, Immerſiones primi & ſecundi ſatellitis 5. aut 6 ſecundis tardius animaduertere mihi licuit, quam ope Tubi $20\frac{1}{2}$ ped.

Inſerviit mihi quoque aliquando in ultimis hiſce Obſervationibus Teleſcopium Campanianum 15. ped. aliudque in Anglia elaboratum 13. ped. quod multa claritate obiecta exhibet. Quin etiam ſæpiſſime obſervationes habitæ ſunt per tres hoſce diverſos Tubos 13. 15. & 22. ped. adiuuantibus me poſt abitum Fratris mei Dnis Krafftio & Vignon ; at vero cum non ſemper accideret ut momenta Obſervationum tanto præciſe intervallo inter ſe diſtarent ac Tuborum longitudines illud requirebant : adſcribendum id eſſe putaui diverſæ oculorum conſtitutioni ; itaque conſultius eſſe credidi ut recenſeam ex omnibus his obſervatis ea, quæ maximam partem ipſe ego definivi ope Teleſcopii omnium noſtrorum longiſſimi. Ab initio etiam cum meus adhuc frater mecum eſſet, hoc aliquoties premebamur incommodo, ut per quosdam dies, in hieme præſertim, Sol non conſpicuus eſſet, quod etiam ſufficiebat ad errorem aliquem tempori inducendum. Eiusmodi Obſervationes, quarum tempus verum incertum eſt ex hac ipſa cauſa quam allegavi, ſunt maxime Octobr. 19. 28. 1727.

Sequentibus temporibus anni nempe 1727. & 28. certior magis fui de tempore vero, exigendo ſæpius quam

 alias

alias motum horologiorum ad Solem, favente nimirum occaſione, ut ineunte vere anni 1727 lineam meridianam ducere potuerim, iuxta methodum a me deſignatam in Commentariis Acad. Reg. Scient. Pariſ. 1719. p. 54.

ECLIPSES SATELLITUM IOVIS
NOSTRIS RESPONDENTES, OBSERVATAE *IN OBSERVATORIO REGIO PARISINO* A D.D. CASSINO ET MARALDO
per Teleſcopia 17. & 18. *ped.*

N.S. temp. vero	*Prima Obſervatio.*
1726 Aug. 9 12 59 49	IMmerſio primi obſervata Pariſiis.
14 51 30	Eadem obſervata Petropoli, per Tub. 15 & $20\frac{1}{2}$ ped.
1 51 41	Differentia meridianorum.

Quoniam vero Petropolitanum tempus illa vice non exactum erat niſi intra quadrantem minuti primi, obſtante nimirum nimio crepuſculo aliisque impedimentis, quæ Satellitem iuſto citius e conſpectu noſtro removerunt, differentia meridianorum exinde paulo maior emergere debet. Supponam itaque illam vi huius obſervationis 1^h. 51$'$. 50$''$.

Se-

Secunda Obſervatio.

	h.	′	″	
1726 Aug. 16	14	55	4	Immerſio primi exacte Pariſiis Obſervata.
1	18	28	53	Periodus huius Satell. per Tabulas.
18	9	23	57	Emerſio 1. veluti Pariſiis apparere debebat.
	11	15	49	Emerſio obſervata Petropoli, capiendo tempus medium inter Teleſcopia 15 & 20½ ped.
	1	51	52	Differentia meridianorum, quam veræ valde propinquam credo, quamvis enim mihi heic loci Lunæ viciniæ nocuiſſet; idem etiam Pariſiis accidit, adeoque differentia meridianorum exinde variari non potuit.

Tertia Obſervatio.

	h	′	″	
Sept. 8	15	12	5	Immerſio primi obſeruata Pariſiis.
1	18	29	10	Periodus primi Satellitis iuxta tabulas.
10	9	41	15	Immerſio, uti Pariſiis obſervari debuit.
	11	32	54	Obſervata Petropoli, capiendo medium inter tempora Taborum 15 & 20½ ped.
	1	51	39	Differentia meridianorum.

Quarta Obſervatio.

		h	′	″	
1726 Oct.	19	10	29	53	Emerſio primi, obſervata Pariſiis, dubia nonnihil.
		12	21	46	Eadem obſervata Petropoli per. Tub. 15. ped.
		1	51	39	Differentia meridianorum.

Dixi in notis antecedentibus ad meas obſervationes, quod non plane certus ſim de vero tempore huius obſervationis. Eadem Pariſiis habita, dubia nonnihil eſt, quia ſcilicet Satelles in vtroque loco nimis vicinus Iovi erat, qui non niſi ante ſex dies in oppoſitione Solis fuerat. Cum tamen differentia meridianorum exinde prodeat non nimis diuerſa a præcedentibus, obſervatio hæc non adeo erronea credenda eſt; auferam tamen 3. ſecunda, cum breviori Tubo, Emerſio haec Petropoli quam Pariſiis obſervata fuerit, ut adeo differentia meridianorum ſit vi huius obſervationis 1ʰ 51′ 50″.

Quinta Obſervatio

	h	′	″	
28	6	54	35	Emerſio primi Pariſiis.
	8	47	8	Eadem Petropoli, per Tub. 15. ped. intra pauca ſecunda.

Dif-

h	′	″
1	52	33

Differentia meridianorum, quæ minui debet tribus ſecundis, ob diuerſam Tuborum longitudinem ; aliisque adhuc quibusdam ob errorem qui in Petropolitanam irrepſit obſervationem , quique effecit vt ſeriusiuſto mihi apparuerit emerſio; utcunque autem tractetur hæc Obſervatio, differentiam tamen meridianorum producit, non minorem quam 1. 52. 20. (^{h} ′ ″) quæ multo maior eſt quam reliquæ præcedentes, credo autem præcipuum errorem exinde eſſe, quod aliquot dies ſine Sole hic exegimus circa hoc tempus, uti antea iam annotavi, quapropter non rationem huius obſervationis habendam cenſeo.

Sexta Obſervatio.

			h	′	″	
1726	Dec.	6	5	20	20	Emerſio primi Pariſiis.
			7	11	18	Eadem Petropoli, per Tub. $20\frac{1}{2}$ ped. dubia nonnihil.
			1	50	58	Differentia Meridianorum,

quæ aucta 5. ſecundis veluti diverſa Tuborum longitudo id requirit, efficit differentiam 1. 51. 3. (^{h} ′ ″) reiiciendam rurſus, quia dubia nonnihil fuit noſtra obſervatio.

Ooo 3 *Septi-*

Septima Obſervatio.

		h.	′	″	
1727 Ian.	7	8	19	0	Emerſio ſecundi Pariſiis inter nubeculas obſervata.
		10	10	0	Eadem Petropoli, capiendo medium inter Tubos.
		1	51	0	Differentia Meridianorum, quæ ob nubes, Pariſienſem obſervationem ſine dubio retardantes, augeri aliquot ſecundis debet; cum autem quantitas huius retardationis æſtimari nequeat, etiam hæc obſervatio in computum finalem admitti non debet.

Octava Obſervatio.

		h.	′	″	
Aug.	21	12	58	30	Immerſio 1. Pariſiis, ubi ſatelles dum intraret umbram amiſſus fuit vento Tubum agitante.
		14	50	30	Eadem Petropoli, per Tubum 22. ped.
		1	52	0	Differentia Meridianorum, quæ minui debet 7 ant 8 ſecundis ob diverſam longitudinem Tuborum, atque adhuc aliis quibusdam ſecundis ob agitationem venti quæ Pariſienſi Tubo nocuit, atque iuſto citius Satellitem e conſpectu removit. Poterit itaque

que ſupponi differentia a reliquis non multum diverſa, 1h. 51′. 50″.

Nona Obſervatio.

		h.	′	″	
1727 Aug. 30		11	15	18	Immerſio primi obſervata Petropoli per Tub. 22. ped. cœlo ſereno & tranquillo.
1	18	29	5		Periodus huius Satellitis iuxta Tabulas.
28	16	46	13		Immerſio uti Petropoli accidere debebat.
	14	54	7		Immerſio obſervata Pariſiis, ubi Satelles ex oculis elapſus, Iove inter tenues nubeculas vertente.
	1	52	6		Differentia Meridianorum, minuenda 7. aut 8. ſecundis uti præcedens ob diverſam Tuborum longitudinem, atque adhuc quibusdam ob nubeculas Iovem Pariſiis impedientem, unde ſatis tutum erit ſupponere vi huius obſervationis differentiam meridianorum 1h. 51′. 50″.

Dif-

Differentia Meridianorum Pariſienſis & Petropolitani, cum Longitudine Petropoleos a Primo Meridiano per Inſulam Ferri tranſeuntem.

QVodſi iam a novem obſervationibus modo recenſitis auferantur 5ta, 6ta & 7ma. ob rationes ibi allatas, medium inter ſex reliquas non multum abludens emerget $1^{h}.\ 51'.\ 50''.$ unde non dubito hanc differentiam Meridianorum Pariſienſis & Petropolitani pro vera aſſumere, in Tempore nimirum. Non exactior enim haberi poteſt, niſi per maiorum Obſervationum non interruptarum quantitatem utriusque loci, ſecus atque in paucis correſpondentibus, quas attulimus, accidit. Per Obſervationes vero Rev. P. Feuillée in Inſulis Canariis habitas Anno 1724. comparatasque cum Pariſienſibus, Longitudo Pariſiorum reſpectu, partis maxime Occidentalis in Inſula Ferri, quæ & ipſa Canariarum maxime occidentalis eſt, inventa fuit præciſe 20 graduum, plane ſicuti Frater meus natu maior nomine Guilielmus amplius quam 20 annis antea prædixerat, uti videre eſt in Diario Eruditorum anni 1700 quam etiam determinationem ſemper adhibuit in conſtruendis ſuis Mappis Geographicis, reclamantibus omnibus aliis Aſtronomis & Geographis; Converſa igitur in Gradus differentia modo inventa Temporis Pariſienſis & Petropolitani, additisque 20 gradibus prodibit vera longitudo Petropoleos in gradibus a primo Meridiano $47^{h}.\ 57'\ 30''.$

EC-

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS
PETROPOLITANIS RESPONDENTES, ET OBSERVATAE *BONONIAE IN ITALIA,* A DOM. EUSTACHIO MANFREDI.

Prima Obſervatio.

	N. S.	h	'	''	
1726 Aug.	18	11	15	46	Immerſio primi obſervata Petropoli per Tub. 15. ped. cœlo ſereno & tranquillo, vicinis inter ſe Luna & Iove.
	1	18	28	53	Periodus huius Satellitis eo tempore.
	16	16	46	53	Immerſio primi, veluti Petropoli apparere debuit.
		15	29	0	Eadem obſervata Bononiæ per Tubum 11. ped. Bononienſium aut 13. ped. Pariſ. dubia
		1	17	53	Differentia Meridianorum,

quæ minui debet 3'' ob diverſam longitudinem Tuborum, erit igitur eadem numeris rotundis 1h. 17'. 50''. ſed Bononienſis obſervatio dubia erat, uude etiam a Dno Manfredi non niſi minuta prima notata ſunt.

Secunda Obſervatio.

			h	′	″	
1726	Dec.	6	7	11	18	Emerſio primi Petropoli per Tub. 20½ ped. dubia.
		1	18	28	9	Periodus Satellitis eo tempore
		4	12	43	9	Emerſio uti Petropoli apparere debuit.
	Dec.	4	11	27	45	Obſervata Bononiæ per Tub. 13. ped. dubia.
			1	15	24	Differentia meridianorum, quæ differentia augeri debet circiter 10″, propter diverſam tuborum longitudinem, prodibit ea igitur 1. 15. 34. ſed dubia erat obſervatio Petropoli & Bononiæ.

Tertia Obſervatio.

	Dec.	29	7	15	48	Emerſio primi obſervata Petropoli per tub. 15 pedum exacte.
			5	59	26	Eadem obſervata Bononiæ per Tub. 13. ped.
			1	16	22	Differentia meridianorum, cui adiicienda ſunt 3″ ob diverſam Tuborum longitudinem, emerget itaque differentia 1h. 16′. 25″. quæ recte ſeſe habere videtur, cum Petropolitana obſervatio exacta fuerit, neque Bononienſem dubium aliquod turbaverit.

Quar-

Quarta Obſervatio.

	h ′ ″	
1727 Ian.	7 10 10 4	Emerſio ſecundi obſerv. Petropoli per Tub. 15. ped.
	8 54 12	Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.
	1 15 55	Differentia Meridianorum. Hæc quoque obſervatio nulli dubio ſubiecta eſt, retinenda igitur pro iuſta, aucta prius 3″ pro diverſa Tuborum longitudine, unde meridiani diſtabunt ex hac obſervatione 1h. 15′. 55″.

Quinta Obſervatio.

	h ′ ″	
Aug. 21	14 50 30	Immerſio primi obſervata Petropoli per Tub. 22. p.
	13 34 39	Eadem obſervata Bononiæ per Tub. 13. ped.
	1 15 51	Differentia Meridianorum. Obſervatio hæc, cum dubia non ſit notata, retineri debet, abiectis tantum 12. ſec. pro diverſa Tuborum longitudine; erit adeoque differentia meridianorum per hanc obſervationem 1h. 15′. 39″.

Sexta Obſervatio.

	h ′ ″	
Sept. 6	13 11 24	Immerſio primi, Petropoli,

			h	′	″	
						per Tub. 22. ped. ubi Iupiter non prius apparuit, quam Satelles iamiam minui cœperit.
1727			11	55	17	Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.
			1	16	7	Differentia Meridianorum, minuenda ob diverſos Tubos 12″. ut prodeat eadem $1^{h}. 15'. 55''.$ quæ pro legitima aſſumenda eſt. Quamvis enim hic Petropoli Iupiter non niſi minuto iam Satellite apparuerit, non tamen id me impediit quo minus perſequerer eum usque ad totalem immerſionem.

Septima Obſervatio.

			h	′	″	
1728	Febr.	16	10	59	26	Emerſio Imi, Petropoli, per Tub. 22. ped. intra aliquot ſec.
			9	43	8	Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.
			1	16	18	Differentia Meridianorum, 12″. augenda ob diverſos Tubos, ut adeo proveniat $1^{h}. 16'. 30''.$ intra aliquot ſecunda, ultra quam exactitudinem Petropolitana hæc Obſervatio ſeſe non extendit.

Dif-

Differentia Meridianorum Petropolitani & Bononienſis in Italia.

Per ſeptem Obſervationes paulo ante enumeratas inventa fuit hæc differentia uti ſequitur: nempe

		h	′	″
per primam	- -	1	17	50
ſecundam	- -	1	15	34
tertiam	- -	1	16	25
quartam	- -	1	15	55
quintam	- -	1	15	39
ſextam	- -	1	15	55
ſeptimam	- -	1	16	30

E quibus ſi auferatur prima, tanquam nimis diverſa a cæteris, capiaturque medium inter ſex reliquas, habebimus differentiam horum Meridianorum quam proxime 1ʰ 16′ 0″ quæ amplectenda tamdiu eſt, dum in utroque loco exactiores habeantur Obſervationes.

ECLIPSES PRIMI SATELLITIS IOVIS PETROPOLITANIS RESPONDENTES, OBSERVATAE ULYSSIPPONE A REV. P. CARBONE S. I.

Per Tub. Campan. 30 palm. Rom. aut $20\frac{1}{2}$ ped. Regior.

Prima Obſervatio.

1726 Aug. 9 14 51 30 Immerſio primi obſ. Petropoli Tub. $20\frac{1}{2}$ ped. dubia 15 ſec. ob crepuſculum.

Eadem

			12	13	30	Eadem obſervata Ulyſſippone.
			2	38	0	Differentia Meridianorum, quæ augeri poteſt aliquot ſecundis ob crepuſculi claritatem, quæ Petropoli Satellitem ſine dubio iuſto citius e conſpectu removit, ſupponam itaque vi huius obſervationis, $2^h.\ 38'.\ 10''$.

Secunda Obſervatio.

1726	Sept.	10	11	32	56	Immerſio primi obſ. Petropoli per Tub. 20½ ped.
			8	54	54	Eadem Ulyſſippone.
			2	38	2	Differentia meridianorum, veræ ſine dubio valde propinqua, cum nihil excipi poſſit, contra utramque obſervationem, ipſaque hæc differentia cum præcedenti etiam fere conſentiat.

Tertia Obſervatio.

	Oct.	28	8	47	8	Emerſio primi, obſervata Petropoli per Tub. 15. ped. intra aliquot ſecunda.
			6	8	52	Eadem Ulyſſipone.
			2	38	16	Differentia meridianorum minuenda 7. ſecundis pro diverſa Tuborum longitudine erit igitur hæc differentia correcta. $2^h\ 38'\ 9''$.

In-

		h	′	″
Inventum eſt per Obſerv.	1	2	38	10
per	2	2	38	2
	3	2	38	9
ubi medium eſt		2	38	7

Annotatio ad has Obſervationes, in qua deducitur, quantum tota fere Europa in Longitudinem ſit extenſa.

OBſervationes quas modo recenſuimus factæ Ulyſſipone & congruentes cum Petropolitanis, primæ omnium forſitan ſunt, quæ in Europa unquam factæ ſunt cum aliqua exactitudine, tanta in diſtantia; cum igitur Ulyſſippo urbs maxime occidentalis ſit totius Europæ; neque in Ruſſia, parte Europæ maxime Orientali, hucusque aliæ obſervationes accuratæ factæ ſint, quam Petropoli; poterit præcedens Meridianorum Ulyſſiponenſis & Petropolitani differentia haberi, pro maxima extenſione totius Europæ in Longitudinem, quantum hucusque accurate definiri potuit, per immediatas obſervationes. Supra dicta meridianorum differentia in partes circuli converſa fit. $39^{\circ}.\ 31'.\ 45''.$

Acce-

Accepi etiam quasdam obſervationes Satellitum Iovis, Berolini a D. Kirch, Norimbergæ a D. Roſt, Madriti à P. Nicaſio Grammatici, & Pekini a P. Ignatio Kögler Soc. Ieſu, tribunalis Aſtronomiæ in Sinis præſide, habitas; cum vero paucæ ſint, neceſſe eſt ut in ſequens volumen horum Commentariorum ſitum Petropoleos reſpectu harum celebrium totius Terræ Urbium, differam; ubi ſpero me interea temporis novas exinde Obſervationes accepturum eſſe, quarum ope ſecurius ſtabilire poſſim has Longitudines.

FINIS.

NATURAL HISTORY

Commentarii T. i.-XIV.
Novi Comment. T. i.-XX.
Acta 1777-82 6 vols.
Nova Acta T. i.-XV.
Mémoires T. i.-XI.
—— VIe Série T. i.-X.
—— VIIe Série T. i.-XXI.

Dulau 7.
July 1881.

BOUND BY
EX LIBRIS